

ビジネスモデリング領域テキスト (プロトタイプ版)

本テキストは、文部科学省の生涯学習振興事業委託費による委託事業として、学校法人河原学園 河原電子ビジネス専門学校が実施した平成30年度「専修学校による地域産業中核的人材養成事業」の成果物です。

【目次】

はじめに	2
序 章 参加と対話により未来を創造するビジネス・モデリング	11
第1章 エクセル利用技術	23
第2章 パワポ利用技術	24
第3章 基礎概念の理解	25
第4章 分析概念の理解	43
第5章 因果と時系列の操作法	63
第6章 シミュレーションの利用法	63
第7章 成長性と相互作用の理解	63

はじめに

このテキストの目的は、日本の普通の高校卒業生を対象として、だれでも理解可能な学習用教科書の形式で、他に例を見ない *systems thinking* と *system dynamics* (以下 ST/SD と略記する) の本格的教科書を提供することである。

ST/SD の教育は、ビジネス・モデリングを現実の場で現実的・具体的・実践的に実施・運用することができる人材を多数養成することを志向している。このため、学習達成度の高いものを選びすぎるような「選抜一篩方式」とは相容れないものであることが、この教科書を通して、学習者にも指導者にも伝わるように工夫されている。

成功するビジネスは、有資格者が指図して他はそれに従うという権力的プロセスではなく、「自ら学習する組織」を形成する社会的プロセスの結果である、と ST/SD は考える。しかれば、そのビジネスのモデリングは、組織成員の共同制作物でないかぎり、実践的意義＝成功するビジネスの実現＝をもたらすものと期待することができないはずである。すなわち、学習のインセンティブを学力の競争的獲得による上位の資格取得に置くような教育方式に対するアンチテーゼと自らなることが SD/ST 教育の志向には含まれているのである。

「だれでも理解可能な学習用教科書」を目指すことが、第一のそして最大の執筆方針である。この方針が第1ページから最終ページに到るまで貫徹されていると自負している。そしてそのことが教科書を読む学習者にも教育者にも自然かつ容易に伝わるものと期待している。

このような教科書はどこにもなかった一唯一の例外は SD/ST に基づく「**K-12** 教育」の初等中等教育である。これを参考として、日本の普通の高校卒業生に相応しい形式の整った、本邦初の ST/SD 学習用教科書をここに上梓するものである、と宣言しておく。

ST/SD は現在ニューヨーク州のオーバニィに本部を置いているが、発祥の地は MIT の故フォレスター, J.W. 教授の研究室である一彼の主著 *Industrial Dynamics, Urban Dynamics, World Dynamics* の三部作によって世に知られ、1970 年代には、日本でも一大ブームとなった。フォレスターの主要な弟子の一人で現在の指導的研究者の一人であるピーター・センゲは、著書 *The Fifth Discipline* 改訂版の序文の中で、W. エドワーズ・デミングの発言として次の引用を掲げている：

—私たちのマネジメントの一般的体系は職場の人たちを破壊してきた。人は生まれながらにして、内発的な動機づけ、自尊心、尊厳、学びたいという好奇心、学ぶことの喜びを備えているものだ。しかし、それらを破壊する力は、幼児期に始まり一ハロウィーンの仮装大賞、学校の成績、そして「よくできました」の金星シールなど一、大学卒業までずっと続く、職場では、人もチームも部門も、ランクづけされ、上位なら報酬がもらえ、下位なら罰が待っている。目標管理制度やノルマ、奨励金や事業計画は、部門ごと

にばらばらに積み上げられ、わからないものやわかり得ないものまで含め、ますます多くのものが破壊されていく—

これが 90 歳を超えたデミングの発言であることの意味は重大である—デミングといえば、一世を風靡した「総合的品質管理(TQM または TQ)」の創始者だからである。現に在る大学も職場も含めた教育システムが「かく在ること」を実現した最高の功労者である。正に「よくできました」の金星シールの発行元なのである。正しくデミングはその輝かしい業績を全否定している—このことの重大さはいくら強調しても強調しすぎることはない。

セングは、人間 90 歳にもなるとかくも正しく世の中が見えるようになるものかと、感心しているが、感心すべきはその点にあるのではない。90 歳を超えて自分がしてきたことの一切が間違いだったと認めざるを得ない境遇に置かれたら、それは誰にとっても悲劇である。そんな心算でやったのではない—といくら弁明しても、それは当の本人を聊かも慰めはしない。

デミングが本当にそう感じていたかどうか—今となっては全く不明である—前出の発言はセングの本にしか載っていない。しかし、大学と職場を含む社会全体の教育システムが—自由に未来を思い描くことができるはずの人の能力をディシプリンの枠内に封じ込めるように—できてしまっていることは事実である。

この無能力の再生産過程から脱却しよう。これが SD/ST からのメッセージである。
本書の構成は以下のとおり。

【テキストの構成】

序章 参加と対話により未来を創造するビジネス・モデリング

初心者がビジネス・モデリングをイメージし易くなるように、読み物としての譬喩をひとつ掲げる。全体についての導入部であり、この同じ序章から、経営学・総合政策学・未来学等の新しい科学への入門をはたすことができる。

第1章 エクセル利用技術

1-1. 集計と表操作の技術

以下の項目について実習を通して操作技術を身につける：

データ 入力 行 列 表示 選択 コピー 切り取り 貼り付け 削除 挿入
書式 ワークシート 検索 置換 リンク 罫線 印刷 カスタマイズ

1-2. 計算と関数の技術

以下の項目について実習を通して操作技術を身につける：

数式 配列 関数 平均値 最大値 最小値 乱数 四捨五入 逐次式 条件 データ集計
ゴールシーク 棒グラフ 折れ線グラフ 位相図

第2章 パワポ利用技術

2-1. 複写と編集の技術

以下の項目について実習を通して操作技術を身につける：

スライド プレゼンテーション テンプレート ドラッグ アウトライン デザイン テーマ スライドマスタ ワードアート コピー 貼り付け

2-2. 因果表現の技術

以下の項目について実習を通して操作技術を身につける：

円 楕円 矢印 回転 実線 破線 点線 始点 終点 直線 曲線 文字入力
因果ループ図の編集 フロウダイアグラムの作成

第3章 基礎概念の理解

日本の高卒者を対象にして ST/SD (systems thinking/system dynamics) を習得させるという全体の目的を達成するために必要となる教員と受講者との間のコミュニケーションを可能とすべく、まず受講生において決定的に不足している語彙を運用可能なレベルにまで充実させる。

3-1. システムの概念

四つの基礎概念を例題を解くという方式で解説する。高校の数学の教科書の記述方法に倣う一例題・練習問題・演習問題を複数題用意する。

理解すべき概念は

1. 変動性
2. 相互性
3. 遅れ
4. フィードバック

である。

抽象的/具体的といったような感覚的な言葉によるレッテル貼りには意味がなく、システムの理解とその伝達という観点からの言葉選びがいかに重要であるかを、問題を解くという作業を通じて自ら気づくように仕向ける。これはまた本書全体を通じての基本姿勢であって、ここでそのことを理解する。

3-2. 因果の概念

1. 原因と結果の間のチェーン
2. チェーンの連鎖
3. 連鎖が導く因果ループ
4. 全体図

の意味を認識する。

3-3. 時系列の概念

システムの変動性が時系列グラフとして表わされることを理解する。

第4章 分析概念の理解

理解が速く先に進んだ学生は分析概念の重要性に自ら気づくように仕向けることを目的とする。受講生グループ内での対話を通して遅れた者のキャッチアップを達成することを考慮し演習用の教材を章末に追加する。

4-1. 因果ループ図

パワポの技術を使って因果ループを図に表わすことを習得させるべく、例題を解くという方式で解説する。高校の数学の教科書の記述方法に倣う—例題・練習問題・演習問題を複数題用意する。

分析概念は理解すべきものではなく自ら使うものであって、分析者＝すなわち受講生自身＝の自由裁量によって都合よく解釈して駆使することが重要である。

多数の練習問題・演習問題を自分で解くことによってその重要性を理解させる。自由なモデリングの基礎は、因果ループ図を自ら描き、他者に見せ、説明し、質問に答え、答えを理解し、図を改訂し、さらに他者に見せて質疑応答-改訂-開陳を無限に継続していくという社会的プロセスにあるということを、演習をとおして理解する。

4-2. システム原型

因果ループ図により八つのシステム原型を理解する。

1. 応急処置の失敗
2. 問題の転嫁
3. 成功の限界
4. 目標のなし崩し
5. 成長と投資不足
6. 成功には成功を
7. エスカレート
8. 共有地の悲劇

4-3. モデリング&シミュレーション

エクセルの表計算で身につけた技術を用いて、シミュレーションを実施する作業を通じて、変動性と不確実性をシミュレーションによって取り扱うことの意味を理解する。

第5章 因果と時系列の操作法

日本の高卒者を対象にして ST/SD (systems thinking/system dynamics) を習得させるという全体の目的を達成するために、システム原型の1～5を例題への解答という形式で記述を行い、その上で学生グループ内の対話を通して理解を深める、という指導方針を確立する。章末には演習問題を追加する。

5-1. 因果と時系列の関係性を扱う技術

因果ループ図を描いてフロウダイアグラムに展開するとそこから時系列グラフが導かれるという一連の操作を複数の例題・練習問題・演習問題を解くという形式で実施し、操作方法に習熟する。高校の数学の教科書の記述方法に倣い、例題・練習問題・演習問題を複数題用意するが、ここでの問題は架空の事実・架空のシステムから作られた例に

基づくものとする。実証性でなく理論の面白さに受講生をひきつけることを主眼とする。

5-2. データと時系列の関係性を扱う技術

実際の統計データの利用によって、理論モデルが意味ある予測を生み出すことを実習する。データ分析から得られるいかなる情報も必ず何らかのモデルに基づくものであり、その理解なくしては、洗練された分析結果も意志決定の役に立たないことを体験的に理解する。そのことが正しくモデリング&シミュレーションの意義なのだということを深いレベルで理解する。

第6章 シミュレーションの利用法

エクセルの表計算機能を使って、時系列的変動性をグラフ化することによって得られる認識力の拡張を実体験するように工夫されたいくつかの例題を解くことを通して、ビジネスのプロセスを形式的なモデルによってシミュレーションすることの意義を理解する。

6-1. システム思考を発展させる技術

どのような因果ループ図が与えられても、それに基づくフロウダイアグラムさえ作成すれば、それによってモデリング&シミュレーションができるということを例題・練習問題・演習問題を解くことによって理解する。

6-2. システム原型の時系列展開

八つのシステム原型について、フロウダイアグラムを作成し、シミュレーションにより時系列グラフが作成できることを実習する。

第7章 成長性と相互作用の理解

実例としての利息計算と企業成長モデルの構造的な同型性に気づくことを主眼とし、エクセルの表計算だけを用いて、モデリングにもとづいた本質的な理解を促す。

7-1. 利息算と企業成長のモデリング

複利計算システムと企業成長モデルのシステム原型上の同一性のもつ意味を理解することによって、ビジネスモデリングが自らの身近な問題であると考えられる根拠を自覚する。

7-2. 利息算と企業成長モデルのシミュレーション

複利計算システムと企業成長モデルのモデリング&シミュレーションを実際にやってみる作業をとおして、自覚した根拠が科学的に裏付けられることを知り、企業成長を自ら計画しようとする起業家的志向を養う。

第8章 遅れの構造と反直観性の認識

エクセルの表計算もモデルが下敷きにあることを理解した上で、表計算ソフトがなかったとしても、数学を用いて同じように解けるということを、例題を用いて理解する。

8-1. 貯水池と危機管理のモデリング

一般社会生活において市民として心掛けなければならない重要なことのひとつに、災害に対する備えがある。地震・風水害のような災害対策として食糧や情報源を確保して

おくことについての個人的対処には限界がある。想定されない事態が生じたときに市民としてどう行動すべきかという「危機管理マニュアル」が重要である。そのことが現実問題であることを理解する。

8-2. 貯水池モデルのシミュレーション

危機管理マニュアルはドキュメントが与えられても危機に際してマニュアルを読んでいたのでは絶対に間に合わない。マニュアルどおりに自分は行動し、他者もそれにしたがって行動すると期待できる状況を保ち続けることが最も重要な災害対策なのである。最も効果的な対策は危機管理マニュアルの作成に参加することであると弁える。

第9章 フィードバック構造の理解

これまで扱った主題や節の内容を総括するとともに、それが企業モデルの多重ループ・フィードバック構造の理解にとっていかに重要であるかについて解説し、例題を解くことを通して自ら学習することが構造を理解する不可欠な要件であることを知る。

9-1. 企業モデルのシステム原型

危機は地震や風水害ばかりではない。自分が所属する企業が経済環境の変化により倒産の危機に瀕するかも知れない。企業の危機管理マニュアルは一従業員であっても、自らのアクションを決める上で重要である。

9-2. 多重ループのフィードバック構造

企業はどんなに小規模であっても多重ループのフィードバック構造ででき上っており、経営者はいくつもの現実的想定の上にアクションをマニュアル化している。想定を超える現実が生じそうになったとき、一従業員にいたるまで各自どう行動すべきかはマニュアルにのっていない。災害対策と同じような「危機管理マニュアル」をもっていないと、いざという時に潰れなくても良い会社が潰れる。倒産の危機を避けるために危機管理マニュアルつくろう。その作成にはシミュレーションが要る。

第10章 ソフトウェアの活用法

ソフトウェアを使うのは、エクセルの表計算とモデリングとを結びつけるためであり、ソフトウェア自体に価値がある訳ではないことを示した上で、その便利さという点に着目して、一例としてのダイナモの利用目的と使用方法について解説する。例題・練習問題・演習問題を豊富にするよう配慮する。

10-1. コンパイラ DYNAMOPⅢの論理

DYNAMOPⅢは system dynamics シミュレーションのための SD/ST を実現するコンパイラである。SD/ST を身につけた人は自由に（無料で）DYNAMOPⅢを利用することができる—もちろんパソコンさえあればの話であるが。このソフトウェアの仕様と操作方法を学ぶ。

10-2. カスタマイズの技術

DYNAMOPⅢのカスタマイズは各自自分が所属するシステムのモデルを作成することによって達成される。モデルの作成はこの教科書をもって学習することによって誰でも

何時でも何処でも実行することができるということを実習によって理解する。

第11章 ケーススタディ

実際のケースを複数とりあげながら、ビジネスモデリングの意義と効果の理解を深める。各々の標題を巧く体現しているようなケースをすくなくとも各節ごとに1つ以上とりあげる。

11-1. 応急処置の失敗(愛媛県事業者の例①)

愛媛県事業者の例①をもってシステム原型の内の応急処置の失敗ケースを学ぶ。

11-2. 問題の転嫁(愛媛県事業者の例②)

愛媛県事業者の例②をもってシステム原型の内の問題の転嫁のケースを学ぶ。

11-3. 成功の限界(愛媛県事業者の例③)

愛媛県事業者の例③をもってシステム原型の内の成功の限界のケースを学ぶ。

11-4. 共有地の悲劇(愛媛県事業者の例④)

愛媛県事業者の例④をもってシステム原型の内の共有地の悲劇のケースを学ぶ。

第12章 高次指数遅れ現象の理解

システムダイナミックスの理論の中心テーマである高次指数遅れがもたらすシステムの反直観的ビヘイビアについて解説する。章末では、理論の応用というよりも、他のビジネスモデリング的知識においてはこれまで十分に扱われてこなかったビジネス現象・集団現象が存在すること、および、その現実において人はどう行動すべきかをST/SDの実践から引き出すことの重要性を例示することを中心とする。

12-1. 1次の指数遅れと指数平均値

基本概念である「遅れ」をとりあげその数学的な理論を数式展開のみでなくシミュレーションを使うことによって学ぶ。数学教育の「むずかしさ」をSD/STによって回避できることを知る。

12-2. 調整的意志決定と遅れの重層化

「遅れ」は形を変えてシステム内のいたるところに偏在している。調整的意志決定は企業経営に欠かせないものであるが、それも「遅れ」であること理解し、遅れの重層化がもたらす予期しないシステムの変動性の増大を理解し、危機管理マニュアルの作成に役立てる。

12-3. 変動性増大への対処

予期しない変動性の増大への対処は、危機管理マニュアルの作成と同じ問題であるが、マニュアル作成への全メンバーの参加が、システム構造の欠陥を発見し、その欠陥を補う構造の変更へと向かうことが本質的に重要である。これをシステム改善という。SD/STはシステム改善の手法であることがこれによって理解される。

第13章 フィードバックと相互作用の理解

モデリング&シミュレーションによる研究事例を示し、組織の一員として各々の仕事に励む人々にとって自らのメンタルモデルが仕事における効率や効果に結びつくこと

が理解できるような例題・練習問題・演習問題のセットを提示する。

13-1. ランチェスタモデルの分析

SD/ST が開発される以前は同様の分析を微分方程式の解法という数学を使ってやっていた。ここではこの旧時代のやり方をランチェスタモデルの分析を見ることによって、SD/ST が意志決定の進歩発展にいかに関与するものであるかを実感してもらう。

13-2. 在庫受注残モデルの分析

SD/ST が開発される以前は同様の分析を微分方程式の解法という数学を使ってやっていた。ここではこの旧時代のやり方を在庫受注残モデルの分析を見ることによって、SD/ST が意志決定の進歩発展にいかに関与するものであるかを理解する。

13-3. 企業行動モデルの分析

SD/ST が開発される以前は同様の分析を微分方程式の解法という数学を使ってやっていた。ここではこの旧時代のやり方を企業行動モデルの分析を見ることによって、SD/ST が意志決定の進歩発展にいかに関与するものであるかを理解する。

第14章 経済予測への応用

経済評論家でもシンクタンクでもない普通の人々が、経済学の知識などなくとも、経済全体について、いつでもモデリング&シミュレーションができるということについて、実例を通して解説する。

14-1. GDP 統計のモデリング & シミュレーション

SD/ST が開発される以前は同様の分析を微分方程式の解法という数学を使ってやっていた。ここではこの旧時代のやり方を国民経済計算の分析を見ることによって、SD/ST が一国経済の進歩発展にいかに関与するものであるかを理解する。

14-2. 日米経済構造の比較分析

SD/ST が開発される以前は同様の分析を微分方程式の解法という数学を使ってやっていた。ここではこの旧時代のやり方を比較経済体制の分析を見ることによって、SD/ST が国際経済の進歩発展にいかに関与するものであるかを理解する。

第15章 経営意志決定への応用

この章はモデリング演習として構成する。学生一人一人が、あるいはグループワークとして、ビジネス・モデリングの演習を実際に行うことを想定して記述する。想定される受講生の現実的関心と合致するようなモデリング演習を実施する。

15-1. 事業計画のモデリング & シミュレーション

事業計画書の作成はシミュレーション以外のなにものでもない。事業計画と事業計画書は通常は別個に作成されるが、SD/ST によってこれが一体化される。危機管理を事業計画に盛り込むことができれば、その作成に全メンバーの参加が必須となる。ここに到って、事業計画の意味がファイナンスから経営戦略へと変化するかも知れない。

15-2. 組織計画のモデリング & シミュレーション

危機管理マニュアルへの全メンバーの参加は組織の構造上の欠陥を発見することに

つながる。これに基づくシステム改善は企業経営を成功へと導く。それは正しく「自ら学習する組織」への進化をもたらすのである。このことの正しい理解を得る筋道を示す。

第16章 企画立案の実践手法

現実の組織における仕事の中で、モデリング&シミュレーションを役立てるには、企画立案の場面における発言・対話が重要になるが、競争によって相手を出し抜くとか議論で指導性を発揮するよりも、正しい認識に基づく正しいアクションへと協力してたどりつくことが重要である。そのための実践的なインストラクションを提示すること。

16-1. ロジックモデルの習得

現実の組織における仕事の中で、モデリング&シミュレーションを役立てるには、企画立案の場面における発言・対話が重要になるが、競争によって相手を出し抜くとか議論で指導性を発揮するよりも、正しい認識に基づく正しいアクションへと協力してたどりつくことが重要である。そのための実践的なインストラクションを提示する。

16-2. 対話による実践手法

対話をとおして、正しい認識に基づく正しいアクションへと協力してたどりつく実践的な手法を習得する。

第17章 評価とフィードバックの実践手法

モデリング&シミュレーションの結果を現実の改善に結びつけるために、実施・評価・フィードバックが円滑に機能しなければならないそのための組織的手法を紹介する。

17-1. 業績およびプロセス指標設定方法の習得

モデリング&シミュレーションの結果を現実の改善に結びつけるために、実施・評価・フィードバックが円滑に機能しなければならないそのための組織的手法を紹介する。

17-2. 組織による実践手法

組織的手法をとおして現実のシステム改善をもたらす「学習する組織」の実現手法を習得する。

第18章 コミュニケーション手法

ワンマン社長による専断的な組織でない限り、正しい認識も正しいアクションもすべて人間集団の中で実行される以上、グループ内およびグループ間でのコミュニケーションが必要となる。これをワークショップという形式で授業で扱えるように指導するための記述を行う。

18-1. ワークショップの基本スキル(発散)の習得

ワークショップという形式で、人と人との対話を促進し、「学習する組織」を実現する模擬実践をとおして、基本スキルである「発散」の学習をはかる。

18-2. ワークショップの基本スキル(収束)の習得

ワークショップという形式で、人と人との対話を促進し、「学習する組織」を実現する模擬実践をとおして、基本スキルである「収束」の学習をはかる。

序章 参加と対話により未来を創造するビジネス・モデリング

ビジネス・モデリングとはどのようなものを指すのか、それはどんな具合に役立てられるのか、勉強すればできるようになるものなのか、そんな疑問に応えるために、この序章において、全体の具体的・実地的なイメージを掴むひとつの譬喩を披露しよう。

次のようなケースを考察せよ。

【状況】

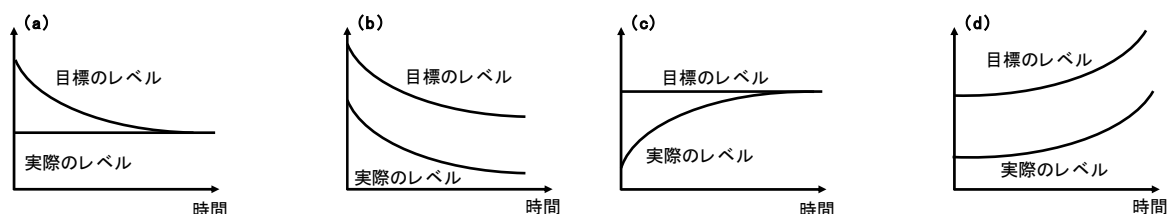
ウェスタン食品は、食感に特徴のあるタトー・ビスケットという人気商品を持っている。この商品の生産性を高めるために、同社ではいくつかのコスト低減策を実施することにした。その方針を受けて工場長は、生産スピードを上げるとともに、製造や在庫の仕方を従来よりも低コストのものに変えた。それから五年、タトー・ビスケットの売れ行きは年々悪くなっていった。同社では、この原因は消費者の食習慣の変化によるものだと考えていた。それからさらに二年が過ぎ、販売数量の低下傾向は改善されなかった一と云う。

そこで、ウェスタン食品は初めて消費者調査を実施することにした。その結果タトー・ビスケットは以前よりも味が落ち、品質にもムラがあることがわかった。しかも当初の品質基準と実際の品質にギャップが生じはじめたのは、十年も前からであることが判明したのである。もっと早くこの品質ギャップが判っていたれば、経営陣は業務プロセスや生産設備、原材料などを調べ、それらに不備があれば生産システム改善のための投資の意志決定を行っていたはずである。しかしその当時、同社はコスト低減活動の真っ最中であって、生産性の向上に注力するあまり品質について注意を払わなかったのである。そのため、品質はほとんど気がつかないほど非常にゆっくりと、消費者が許容できないところまで悪化していった。

目標とするレベルと実際のレベルの間にギャップが発生した場合、ギャップを埋めるには二つの方法がある。一つは実際のレベルに対して是正措置をとることである。ただし、それを行うには時間や労力、資金などが必要である。さらにこの方法にはいくつかの問題がある—効果があるという保証がないし、仮に効果があったとしても、それが現れるまでに時間を要するし、実際のレベルが低かったと認めることで責任が問われる可能性がある—といった諸問題である。

ギャップを埋めるためのもう一つの方法は、成果や目標のレベルを実際のレベルまで下げることである。目標を下げることは望ましくないと思われがちだが、常に悪いとは言えない—目標そのものが非現実的である場合は是正すべきだし、目標の達成よりも先に解決しなければならない重要問題が発生した場合や、当初の目標以外に優先すべき新たな目標が生じる—場合もある。また目標のなし崩しは、必ずしも状況を悪化させるとは限らない—目標と現状を向上させ続けるという状態に転化させることによって、プラ

スの効果を生み出すために利用できる—目標レベルと実際レベルのギャップを埋めることで目標をいったん達成した後、更に目標を高めていくことによって再び目標と実際のレベルのギャップが広がるが、このギャップを埋めることでさらに高い目標が達成される一場合もある。場合毎に時系列グラフで表わせれば次のようになる：



【構造の記述】

目標のなし崩しは二つのループ構造で記述される。一つのループは実際のレベル、目標のレベル、両者のギャップ、ギャップを埋めるための是正措置の三つの要素からなる。そして、是正措置とその効果の発生との間には「遅れ」がある。これは、是正措置の効果が把握できるまでに比較的長い時間がかかることが多いためである。この「遅れ」のために、ギャップを埋めなければならないというプレッシャーは、まず目標の引き下げとなって現れる。このことが第二のループを構成する。これは故意に怠けているとか品質を等閑にしているといったことではなく、現状の課題に対応するためにはそうせざるを得ない場合が多いからである。

ウェスタン食品のケースでは、タトー・ビスケットの生産性をあげるために、コスト低減を行うことにした。良い製品を作ることによって販売数量の増加をはかることよりコスト低減に注力した方が結果が早く出るため、取り組みやすい選択肢を選ぶことになったのである。これによって「高品質」という目標が「ある程度で十分」になってしまった。このとき是正措置が同時に取られていれば、目標と実際の間のギャップは双方が歩み寄り、どこかで一定の均衡状態を現出することが期待されたはずである。

目標の引き下げが先行するとギャップが小さくなるので是正措置は必要なくなる。品質はさらに低下し、ますます目標が引き下げられて、是正措置が講じられないまま、実際のレベルがどこまでも低下してゆく。

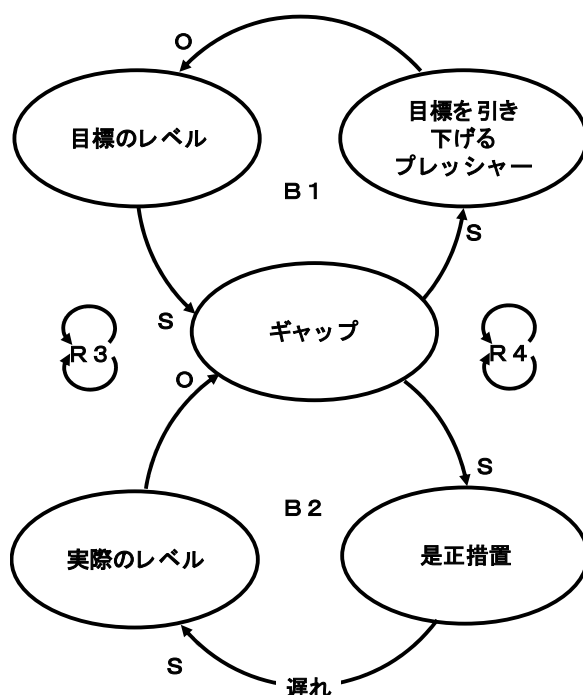
是正措置が先行する場合には、実際のレベルを修正し改善するための行動により、実際のレベルが目標のレベルへと押し上げられる。ギャップが埋まると、目標引き下げのプレッシャーが、逆転して目標引き上げの動機に変わり、目標が引き上げられてギャップが再び広がる。これが次の是正措置を行うきっかけとなり、目標と実際のレベルの双方がどこまでも向上してゆく。

以上の二ループ構造を描いた下図のようなものを「因果ループ」という。因果ループは、変を表わす楕円形の要素と要素間の因果関係を表わすリンク矢印で構成される。

ここでリンクの上に S と印してあるのは矢印の始点と終点の指標が「増ならば増」「減ならば減」と同方向で変化する関係にあることを表わし、O と印してあるのは矢印の始

点と終点が「増ならば減」「減ならば増」と反対方向で変化する関係を表わしている。

S を＋、O を－として二つの指標 A, B の間で経路するリンク上の印の積をとって＋ならば $A \rightarrow B$ の関係は S、－ならば $A \rightarrow B$ の関係は O である—と定める。



一周する関係【 $A \rightarrow B \rightarrow A$ 】についても経路する印の全ての積をとって結果が－ならば均衡サイクルと呼び、＋ならば拡張サイクルと呼んで、各々B, R で標示する。【目標のレベル→ギャップ→目標を引き下げるプレッシャー→目標のレベル】は、経路リンク【SSO】＝【 $++-$ 】で積は－だから均衡サイクルのB、これに1番目のループという意味で1を付しB1としてある。【実際のレベル→ギャップ→是正措置→実際のレベル】も【SSO】で、積は－だから均衡サイクルのBで、2番目のループB2と標示した。

8の字型にループさせると【目標のレベル→ギャップ→是正措置→実際のレベル→ギャップ→目標を引き下げるプレッシャー→目標のレベル】と経路して【SSSOSSO】＝【 $++-+-$ 】の積は＋だから拡張サイクルのRに3番目のループの3を付けてR3と標示してある。同じく8の字で、【実際のレベル→ギャップ→目標を引き下げるプレッシャー→目標のレベル→ギャップ→是正措置→実際のレベル】は【OSSSSS】＝【 $-++-++$ 】は＋だから4番目の拡張サイクルのR4を付け加えることもできる。

拡張サイクルは見る人の価値判断によって悪循環と呼ばれたり良循環と呼ばれたりする。悪循環も良循環も同じ構造（拡張サイクル）から生じる現象である。

このように因果のリンクを追跡して、問題に含まれているループが幾重にも重なる構造を図として明らかにしてゆく作業が「システム思考 systems thinking」の技術—それは技能と呼んでも好い—である。

ある程度までシステム思考を続けると「多重ループのフィードバック構造」を持つ問題が自分で見えるようになってくる—そればかりでなく、描かれた「因果ループ図」を人に見せて対話の場に晒し—認識を共有することによって—協力して解を求めることができるようになる。

目標品質と実際品質との乖離がさらなる品質の低下を招くという因果ループ構造の認識は、販売担当者は販売のことだけ、製造担当者は製造のことだけ考えて、各々が自分の職分に忠実にコスト削減を図っていればそれで良かった従来のやり方からは生じない。一少なくとも、タトー・ビスケットの場合は生じなかった—そのことが長期に亘って少しずつ実際品質を低下させ—そうした状況を転換するためには何らのアクションも講じられずに放置されていた。

正しいアクションは唯一正しい認識からもたらされることを知って—各々担当ごとの専門性の強化が認識の断片化をもたらすことの弊害に気がついて—初めて、従来のやり方を改めようとする志—未来志向—を販売担当者も製造担当者も共有することができたのである。—ここで作成された因果ループ図の認識が正しいかどうかは、その認識によって引き起こされるアクションの「実施可能性と費用対効果」によって測られる。

任意のアクションの「実施可能性と費用対効果」を予測する一般的方法はない。アクションは必ず現実を変化させ—変化した現実からのフィードバックを受け—実施結果自体が変動性に晒されるからである。変動するシステムの状態を未来に亘って追跡することなしには「実施可能性と費用対効果」を分析することはできない—未来学が長い間オカルト頼みだったのはそのためである—が、20 世紀後半に入ってコンピュータ・テクノロジーが二つの可能性を拓いた：一つは現代版オカルトともいえるべき “AI” であり、もう一つは人の創造性を組織化する “modeling & simulation” である—現代の未来学は迷うことなく後者を選んだ。

【未来学入門】

未来学アプローチの概念を知るには、次の譬え喩が好適である—1498 年 12 月、ミケランジェロが一塊の大理石の前に立ったとき、1 年後に自らの手で彫刻されて出現するピエタの像は間違いなく彼の胸裡にあったはずである。この胸裡の像をメンタルモデルと呼び、胸裡の像と作品を結ぶコンテ continuity をモデリング&シミュレーションと呼ぼう。これに題して「磔柱から降ろされたばかりのイエスを膝に抱く聖母マリア」と見るのは人の解釈である—「未来」を作品として人が創作すべきものであるとしたとき、メンタルモデル—モデリング&シミュレーション—解釈—という一連の作業を凡夫がいかに努力したとしても、その作品が「サンピエトロのピエタ」になるのはミケランジェロならではの奇蹟—汝天才ならぬ身のほどを知れ—によるもの。ただし、現在制作中の作品は「サンピエトロのピエタ」ではなく「自分たちの未来」なのである。誰でも否応なく、この制作作業に自然に参加している。モデリング&シミュレーションを全くやらないとしても、誰でも「自分たちの未来」の制作に従事していることに変わりはない。

人がいかなるメンタルモデルを持とうとも、そこから引き出される「可能的未来像」は、本当に実現する「未来現実」とは別物である—それを端から一致させられるのは天才のみである—が、一つだけ確かなことがある—或る時点に想定した期間—ミケランジェロの場合は1年間—経過後の未来時点の現実へと向けて、人は刻一刻と近づいている。

途中で「可能的未来像」を修正しようとしまいと、メンタルモデルを改訂しようとしまいと、満期時点において「可能的未来像」と「未来現実」は一致する。その時点ではもはや「未来像」でも「未来」でもないユニークな現実が存在するのみであるが、その一瞬前には「可能的未来像」と「未来現実」は定義的に別個のものとして存在し、恐らく両者の内容は一致していたであろう—では、一日前には、一週間前には、…、どうだったであろうか。

「自分たちの未来」を共有する普通の人々の間で、因果ループを見せ合いながらダイアログを展開する—話題は当然メンタルモデルや可能的未来像にもおよぶだろうが、ダイアログは討論や交渉とは違って、優劣を競ったり妥結点を求めたりするゲームではない—と解っている人—競争社会が生み出した偏った動機づけに馴化されることを拒否する—と決めている人—自由になりたいと努力する人—すなわち普通の人々の間で、相互関係的にダイアログを展開する—と、未来時点までの期間中に、多様な「可能的未来像」がいつの間にやら「未来」が取れた「現実」に収束する。この事実を、全く同じだが、「現実」がいつの間にやら「可能的」が取れた「未来像」に収束すると言っても良い。

すなわち、「自分たちの未来」の共有は、各自の空想する未来像の実現値としてユニークな現実を未来時点に創出する—これが未来学の基本定理である。

予め定めた未来の或る時点 T における価格で特定の商品 X を売り買いすることを定めた約束書きを先物 Y とする。 Y もまた商品であるから、混同を避けるため、 X を現物と呼ぶ。任意の時点 $t \leq T$ における現物の価格を $p_x(t)$ とし先物の価格を $p_y(t)$ とする。このとき $|T - t| < \varepsilon$ で $t \rightarrow T$ に対し $p_y(t) \rightarrow p_x(T)$ となる正の数 ε が存在して $p_y(T) = p_x(T)$ である。任意の時点 $t < T$ において現物を買った人は時点 T において売る際 $p_x(t) > p_x(T)$ なら $p_x(t) - p_x(T) = L > 0$ だけ損失を蒙る—時点 t で先物を売っておけば時点 T で買い戻す際 $p_y(t) - p_x(T) = P$ の利益が得られる。純利益を計算すると $P - L = p_y(t) - p_x(T) - [p_x(t) - p_x(T)] = p_y(t) - p_x(t)$ であるから時点 t で $p_y(t) = p_x(t)$ であれば時点 T における現物価格 $p_x(T)$ がどれほど下がっても—仮令暴落しても—純損失を0にすることができる—これをリスク・ヘッジという。

時点 t で $p_y(t) > p_x(t)$ であれば、現物買いの先物売りが、時点 T での未来の正の純利益 $P - L > 0$ を時点 t において確定してしまう—無リスク利益機会が生じる—この機会を見逃したら上司に叱られるから、人は先を争って現物買いの先物売りに奔る。—これを裁定または鞘取り arbitrage という—その結果、大量の先物売りがわずかな期間 $[t, t + \Delta t]$ の間に $p_y(t + \Delta t)$ を低下させるから、鞘 spread $= |p_y(t) - p_x(t)| \rightarrow 0$ となって、

アッという間に無リスク利益機会は消滅する。

時点 t で $p_y(t) < p_x(t)$ であれば、現物売りの先物買いで鞘を取れば良い—その場合は、先物買いが殺到して $p_y(t + \Delta t)$ を上昇させ、同じく $|p_y(t) - p_x(t)| \rightarrow 0$ となってアッという間に無リスク利益機会は消滅する—はずである—これは「デリバティブの理論」の教えるところである—が、鞘が大きくひらいている場合にはそうはいかない。大量の現物売りが出て一定範囲を超えて $p_x(t + \Delta t)$ を低下させると、投機目的の現物買いが誘発されて、ヘッジのためにその分の先物が売られる—その結果 $p_y(t + \Delta t)$ はさらに低下して、鞘が一層ひらく—という因果ループのところで見た拡張サイクル—ポジティブ・フィードバック—が生じるのである。

市場が拡張サイクルにはまると手の施しようがない。先物価格に先導されるかのように、現物価格がどこまでも低下して大暴落を引き起こす—1987年10月19日のブラックマンデーはこうして引き起こされた。

ニューヨーク証券取引所に端を発して史上最大規模の世界的株価大暴落が引き起こされた真の原因は何であるか「よくわからない」とされる—が、優等生たちに「よくわからない」と言わせるところに真の原因がある—教育システムが間違っているのである。

自分たちの輝かしい future（未来）を共同制作するために役立つものが科学であり技術であるはずなのに、開発の目的がいつのまにやら futures（先物）の技術にすり替えられてしまったのである。

未来学の定理に戻って、普通の人々のダイアログをもう一度見直そう—討論や交渉ではなくダイアログである—競争に勝つこと、相手を出し抜くことを目的とした技術は、ダイアログを助けるものではなく、逆に阻害するものである。現に優等生たちはブラックマンデーの真の原因と正面から向き合おうとしない。

競争に基礎を置く市場原理からは「自分たちの未来」は生じない— futures 価格付けのための discussion ではなく future 共有のための dialogue から生じ得る。

ダイアログで取り交わされる内容は普通の人々各々の「解釈」である。その内容が「可能的未来」の全体像を構成し、その全体が「未来」の現実を創る。そして—これが一番に重要なのだが—ダイアログのプロセスを通して、人は各々のメンタルモデルの存在に気づく—自覚的にメンタルモデルを改訂することができたら、彼は望み得る最高の価値を手に入れたことになる—彼は「学習」したのだ。

天才ミケランジェロでさえメンタルモデルを改訂している。死の直前まで手探りで—視力を失っていたから—掘り続けた「ロンダニーニのピエタ」を見れば、命がけの学習—大天才級—の凄まじさが解る。

サンピエトロのマリアの謎—ロンダニーニのイエスの腕—をめぐって、これまでさまざまな解釈が語られてきたが、それは論争といったものではなく、皆対話を楽しんで—我々には無縁だが—カトリック信者たちが自分たちの未来を創り出すことに貢献してきた。

ピエタのメンタルモデルも―それと試作品とをつなぐコンテも―死ぬまで続いた学習も―ミケランジェロ個人のものである。しかし、教会に鎮座する彼の作品と―解釈と―それをめぐる対話の継続と―は、人々の信仰をかく有らしめたカトリック教会の学習―組織もまた学習する―をもたらしただけの人々のものである。

神聖ローマ皇帝の差し向けたドイツ兵によるローマ劫掠によって、人々の多くは凌辱され虐殺されたが、それにもめげず、組織として生き延びたローマ教会の未来は、正しく人々の創り出した作品であった。神聖ローマ帝国もフィレンツェ共和国も滅んで歴史地区として世界遺産に名を留めるのみだが―バチカン―は学習する現役の組織にしかつ世界遺産として今も在る。

自分たちの未来を創造するのに人々が鑿を揮う必要はなかった―ミケランジェロが居たからである。彼は未来の試作品＝モデルを創り―人々はその多様な解釈を対話によって共有し―未来現実へと総合した。

ミケランジェロは間違いなく優等生―彫刻のみならず絵画・建築・詩でも超一流―として、メディチ家でも教皇庁でも伝統的権威に基づいて褒め称えられた。16 世紀においても、教育システムはもちろん間違っていたし、優等生はミケランジェロー人ではなかった。大勢の優等生たちが、教育システムから独立して自由に試作品＝モデルを世に送り出したからこそ、そこにルネッサンスは最盛期を迎えたのである。彼らは天才ではないと身のほどを知るからこそ、天の声など聞こえない普通の人間の自由な発想を駆使―ルネッサンス―それに続く近世・近代社会をも含め―正しく未来を実現する歴史―に「ひとやくかった」のである。

彼の芸術作品それ自体は、その多くが猥褻図画扱い―イブに無花果の葉を被せ―マリリアにパンツを穿かせ―といった―散々な凌辱の憂き目を見てきた。

【優等生の役割】

教育システムがいくら間違っているとしても、自分たちの未来を創る普通の人々は、天才候補生―優等生たち―が次々とモデルを見せてくれるチャンス到来を大歓迎したことだろう。人々は試作品と当にそれが生み出されるプロセスを見て勝手な解釈を下し―多様な解釈を対話に載せ―勝手な未来像を思い描く―もう一つ別のプロセス―「モデリング & シミュレーション」とは別の「解釈&ダイアログ」のプロセスを営むのである。

優等生にしてみれば制作中に素人と対話するなんて真つ平だろう。「トウシロの見世物じゃねえ」―渡哲也演じる人斬り五郎の啖呵が極まる。ミケランジェロだって教皇の勝手な注文に腹を立てているが、ダビデ像を彫る際に上半身を大きくし―下から見上げて初めて均整が取れるよう―人々の視点を制作の中に採り込んでいる―次元の違う無言の対話がそこにある。

次元の違う「対話」の譬え喩としてもっと身近な例を一つ挙げよう：

中国の改革開放政策は、短期間での生産システムの近代化を至上命題として推し進められたが、日本からの品質管理技術の導入が最重要課題の一つであった。彼らは優等生

を派遣してデミングの教科書で TQM を一生懸命勉強したが、知識を習得しても品質が改善される訳ではないことを思い知らされる結果となった—いまだに日中製品間の品質格差は解消されていない。

上海郊外 M 県に創られた経済特区に工業用ミシンの世界的ブランドである日本の J 社が工場を建てた。中国の地元産業からの部品調達が図られたが、納入される個々の部品の品質のバラツキが大きく、輸出品として出荷できる品質レベルが達成されなかった。

J 社現地法人の日本人社長は、現地下請けから納入される部品をすべて受け入れ、仕入代金を現金で払い、納入された不良部品を一々叩き直す部局を自社工場内に別に設けた—そんなことをすれば、アドバンテージを取られて平気で不良部品を押し付けてくるようになる—と、周囲は心配した—が、そうはならなかった。

地元産業は資金繰りが楽になったことで大喜びしたばかりでなく、部品のバラツキがもたらす後工程への迷惑をできるかぎりなくすことが、自社の存続にとっていかに重要であるかを組織として学習したのである。その結果、納入される部品の品質は少しずつ向上し、日本人社長は工員たちばかりでなく下請け企業からも「お父さん、お父さん」と慕われて、ついに、東欧に向けて工業用マシン輸出の初台出荷をなし遂げた。

百万言を費やして説得しても一飴と鞭を使って教育しても—統計学とコンピュータを駆使しても—組織が学習することなくしては—未来は啓かれない。無言の対話は以心伝心ではない—正しいアクション=正しい認識によって初めてもたらされるのである。

優等生の役割は、我慢して普通の人々とおつき合いすることではなく、正しいアクションを自ら選び採ることである—それが人々との間で無言の対話を成立させる。正しさは実施可能性と費用対効果によって測られる—と、前に述べた—システム思考の文脈に戻ろう。

未来は人々が共有する多様な可能的未来から出現する—システム思考の人々は対話をとおして因果ループの多重構造を把握する—優等生は対話に参加してもしなくても—因果ループ図を「分析」するだけで善い。

分析では、因果ループ図の部分に注目して—例えば実際水準と是正措置との間には遅れがあるという部分を取り出して—方程式に翻訳する。部分の方程式化を並列させて、因果ループ図の示す範囲での全体を網羅すれば、試作品としてのシステム・モデルができ上る。システム・モデルができると直ちにシミュレーションが実行されコンピュータのアウトプットが返ってくる。これが優等生の創る試作品である—試作品を見て人々は勝手な解釈を下し対話に載せる—すると人々の間で可能的未来像が浮かび上がる—優等生も人々も可能的未来像を見て各々メンタルモデルとの不具合を認識し、モデリングにフィードバックする。再度の分析によりシステム・モデルを改訂し、新たな試作品が生まれる。このようにして、未来に到るまで試作品を提出し続ける—未来学アプローチにおける優等生の役割である—そのツールの一つとして「システム・ダイナミックス」と呼ばれる手法がある。

【システム・ダイナミクス】

システム・ダイナミクスは現在ニューヨーク州のオーバニィに本部を置いているが、発祥の地は MIT の故フォレスター, J.W. 教授の研究室である一彼の主著 *Industrial Dynamics, Urban Dynamics, World Dynamics* の三部作によって世に知られ、1970 年代には、日本でも大ブームとなった。フロー・ダイアグラムとダイナモ方程式を武器として、因果ループ図の分析に特に威力を発揮する手法を提供している—それは、例えば、次のように展開される。

部分としての「実際水準と是正措置との間には遅れがある」は方程式に翻訳されて、
R 是正 .KL=DELAYN(是正措置 .JK, 遅れ, 1, 0)

と書かれる一文頭の **R** を方程式記号といい、これが Rate 方程式を表わしていることを意味している。**是正**, **是正措置**, **遅れ**などは変数名であり、因果ループ図に示されるすべての要素は変数名で呼ばれる。変数名の末尾に付された **.JK**, **.KL** を時間添字という。**DELAYN** はダイナモ関数—上例では「1 次の指数遅れ」を表わしている—これは次の 3 本の方程式：

$$\mathbf{L} \text{ 努力蓄積 .K=努力蓄積 .J+DT}\times(\text{是正措置 .JK}-\text{是正 .JK})$$

$$\mathbf{R} \text{ 是正 .KL=努力蓄積 .K/遅れ}$$

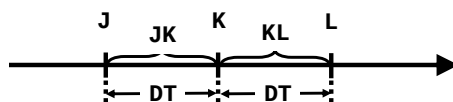
$$\mathbf{N} \text{ 努力蓄積}=0$$

を 1 本の関数にまとめたものである。方程式記号 **L** はこの式が Level 方程式であり、**N** はその初期値を与える式であることを表わしている。**DT** は任意の微小な時間間隔であるが、これをあるいは **dt** と書いて

$$d \text{ 是正}/dt = \text{是正措置} - \text{是正}$$

のような微分方程式で表記しても全く同じことを表わしている—前の表記法をダイナモ方程式という。

レベル方程式で定義される変数はストックとしての変数であるのに対し、レート方程式で定義される変数はフローとしての変数を表わすので、時間添字によって両概念の次元の違いを区別している。下図のように時間軸を左から右への時間経過として描くとき、



3つの時点 **J**, **K**, **L** に対し、長さ **DT** の2つの期間 **JK**, **KL** を区別する。単位時間当たりのフロー **x**, **y** の期間 **JK** における流入量 **DT**×**x**.**JK**, 流出量 **DT**×**y**.**JK** によって時点 **K** におけるストック **z** の水位が決まるものとして、これをレベル方程式：

$$\mathbf{L} \quad \mathbf{z} .\mathbf{K}=\mathbf{z} .\mathbf{J}+\mathbf{DT}\times(\mathbf{x} .\mathbf{JK}-\mathbf{y} .\mathbf{JK})$$

で表わす。時点 **K** における **z** の一定割合 **1/T** を常に流出するよう調節するものとするれば、レート方程式：

$$\mathbf{R} \quad \mathbf{y} .\mathbf{KL}=\mathbf{z} .\mathbf{K}/\mathbf{T}$$

でフローの決定が表わされることになる。この一組のダイナモ方程式を「1次の指数遅れ」と呼ぶ。この式を「 y は x の1次の指数遅れであり、平均遅れの長さは T である」と読む。微分方程式なら

$$dy / dt = \lambda(x - y) \quad \text{ただし} \quad \lambda = 1/T$$

と書く。これをダイナモ関数で

$$R \quad y.KL = \text{DELAYN}(x.JK, T, 1)$$

と書いても、全く同じことを表わしている。

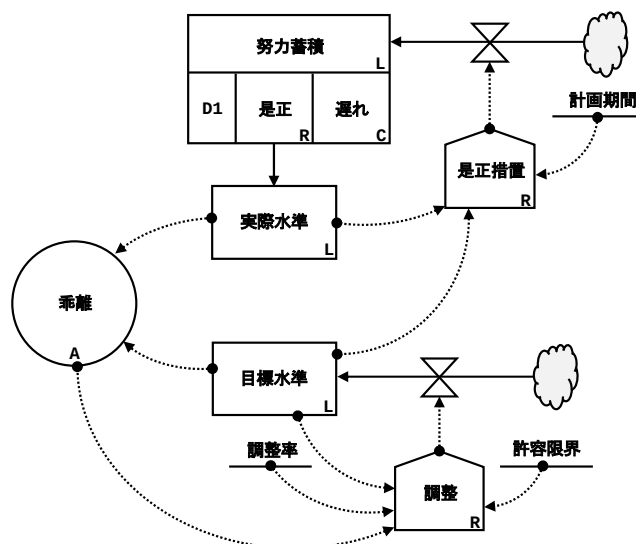
レイト方程式の概念を用いて「調整的意志決定」は

$$R \quad \text{是正措置}.KL = (\text{目標水準}.K - \text{実際水準}.K) / \text{計画期間}$$

のように表現される。フロー量 **是正措置** とストック量 **目標水準**、**実際水準** では次元が異なるので、右辺と左辺の測定単位を合わせるために、時間で測られる定数で割り算する必要が生じるが、このパラメータの意味を考えて **計画期間** と仮に呼んでおこう—というのが、この式の表わすところである。

このように、因果ループ図を分析するには、個々の部分を方程式で表わすモデリングの作業が必要になるが、そのための技術は勉強して習得しなければならない—これこそ優等生が最も得意とするところである—優等生の役割は我慢して普通の人々とおつき合いすることではないと前に述べたが、為すべきことはこれに盡きる—一部分を分析して全体へと総合するために実践をとおしてモデリングの技術を身に着ける—のである。

分析をスムーズに運ぶため因果ループ図をブレークダウンして—優等生は一次の—ように描く：



このような図を「フロー・ダイアグラム」という。

レベル変数とレイト変数の違いが一目で判るように工夫しただけであるが、実線の直線矢印で「流れ」を表わしているというイメージを図化したものである。点線の曲線矢印は情報の受け渡しを表わし、レイトは指数遅れの場合を除いて五角形で、レベルは長

方形で表わすという方針で描かれている。円形は補助変数といって、レイト方程式の右辺を数式で表わす際に登場する人為的な工夫に変数名を与えたものである。構造の記述としては因果ループ図と同一であるがフロー・ダイアグラムを描くことにより、方程式を書く作業が楽になる。

補助変数の定義式を補助方程式と呼び、方程式記号 **A** を与えて次のように書く：

$$\mathbf{A} \quad \text{乖離} \cdot K = \text{目標水準} \cdot K - \text{実際水準} \cdot K$$

乖離が大きくなってある範囲を超えると目標水準を調整するアクションがとられる—というのを

$$\mathbf{L} \quad \text{目標水準} \cdot K = \text{目標水準} \cdot J + \text{DT} \times \text{調整} \cdot JK$$

$$\mathbf{R} \quad \text{調整} \cdot KL = \text{調整率} \times \text{目標水準} \cdot K \quad \text{if } \text{乖離} \cdot K \geq \text{許容限界} \\ = 0 \quad \text{otherwise}$$

と書きたいところであるが、これだと乖離が正の値をとるとますます目標水準が高められ、拡張サイクルが働いて、どこまでも乖離を大きくしていつてしまう。

この調整レイトを決める意志決定が現実になどどのようなになっているか—あるいはどのようになさるべきか—は重要な経営問題となること、この一本の方程式を定式化する段階で、実務経験の少ない—現実には疎い優等生にも—正しく認識されるのである。

優等生ならこの問題を理論的に解こうとするだろう。

例えば—乖離といったってプラスもマイナスもあり得るから、「乖離が大きくなって」というのは絶対値のことを指している—判定条件文は $\text{乖離} \cdot K \geq \text{許容限界}$ ではなくて $|\text{乖離} \cdot K| \geq \text{許容限界}$ と書くべきだろう—その場合のアクションや如何に—では逆に $|\text{乖離} \cdot K| < \text{許容限界}$ の場合のアクションや如何に—と因果ループ図に表現されているリンクのさらなる分解へと進む。

結果は、いくつかの補助変数の追加—定義—関数形の特定といった作業になるが、優等生が学校で学んだ知識がここで役立つことになる。暫定的に優等生 **A** は次のように定式化したとしよう：

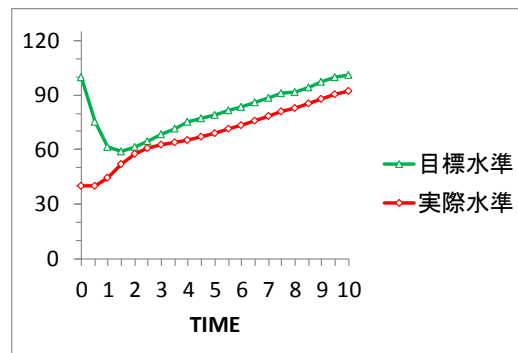
$$\mathbf{R} \quad \text{調整} \cdot KL = \text{引上} \cdot K - \text{引下} \cdot K$$

$$\mathbf{A} \quad \text{引上} \cdot K = \text{調整率} \times \text{目標水準} \cdot K \quad \text{if } |\text{乖離} \cdot K| < \text{許容限界} \\ = 0 \quad \text{otherwise}$$

$$\mathbf{A} \quad \text{引下} \cdot K = \text{乖離} \cdot K / \text{調整期間} \quad \text{if } |\text{乖離} \cdot K| \geq \text{許容限界} \\ = 0 \quad \text{otherwise}$$

これですべての変数に方程式が与えられたことになる。

後はパラメータ **遅れ**, **計画期間**, **許容限界**, **調整率**, **調整期間** に値を与え、**目標水準**, **実際水準** の初期値を定めて、シミュレーションを実行すれば、以下の結果を得る—これが優等生 **A** の試作品である。



優等生 A のダイナモ方程式モデルは次のものである。これは試作品と一緒に提出され、他の優等生等の批判に曝されるべきものである。結果とその解釈のみならず、モデルそのものを人目に曝すことに適した手法—この手法をシステム・ダイナミックスという。

L	実際水準 . K=実際水準 . J+DT×是正 . JK
R	是正 . KL=DELAYN(是正措置 . JK, 遅れ, 3, 0)
R	是正措置 . KL=(目標水準 . K-実際水準 . K)/計画期間
L	目標水準 . K=目標水準 . J+DT×調整 . JK
R	調整 . KL=引上 . K-引下 . K
A	引上 . K=CLIP(0, 調整率×目標水準 . K, 絶対値 . K, 許容限界)
A	引下 . K=CLIP(乖離 . K/調整期間, 0, 絶対値 . K, 許容限界)
A	乖離 . K=目標水準 . K-実際水準 . K
A	絶対値 . K=ABS(乖離 . K)
N	目標水準=100
N	実際水準=40
C	調整率=0.1
C	計画期間=2
C	遅れ=1
C	許容限界=10
C	調整期間=1
PLOT	目標水準, 実際水準
SPEC	DT=.1/LENGTH=10/PRTPER=1/PLTPER=.5

【優等生でなければ】

優等生でなければダメなのかと早トチリしてはいけない。過去から—ミケランジェロは 15 世紀の人—現代までの長い間、こういったことは優等生たちの独占的守備範囲だったことは間違いない。それが今、大きく変わろうとしている。IT 革命のもたらした最も大きな未来への貢献は、モデリング&シミュレーションの仕事を優等生の独占から解放し、普通の市民の手に平等に頒布したことである。もともと未来制作に参加していた人々が優等生の守備範囲にも参加する新たな歴史が始まっているのである。

第1章 エクセル利用技術

図のようなエクセル表形式の教材が多数を占めるので、今回のドラフトにおいては、限られた紙幅の都合上、掲載を割愛する。

ファイルホーム挿入ページレイアウト数式データ校閲表示活用よう!エクセル

切り取り

貼り付け

コピー

書式のコピー/貼り付け

クリップボード

フォント

配置

数値

スタイル

セル

編集

Arial-10A A B I U 背景色塗りつぶしセルを結合して中央揃えセルの書式設定として書式スタイル挿入削除書式クリア

ΣオートSUMフィルクリア並べ替えと検索とフィルター選択

AE31fx=AE30+AD31

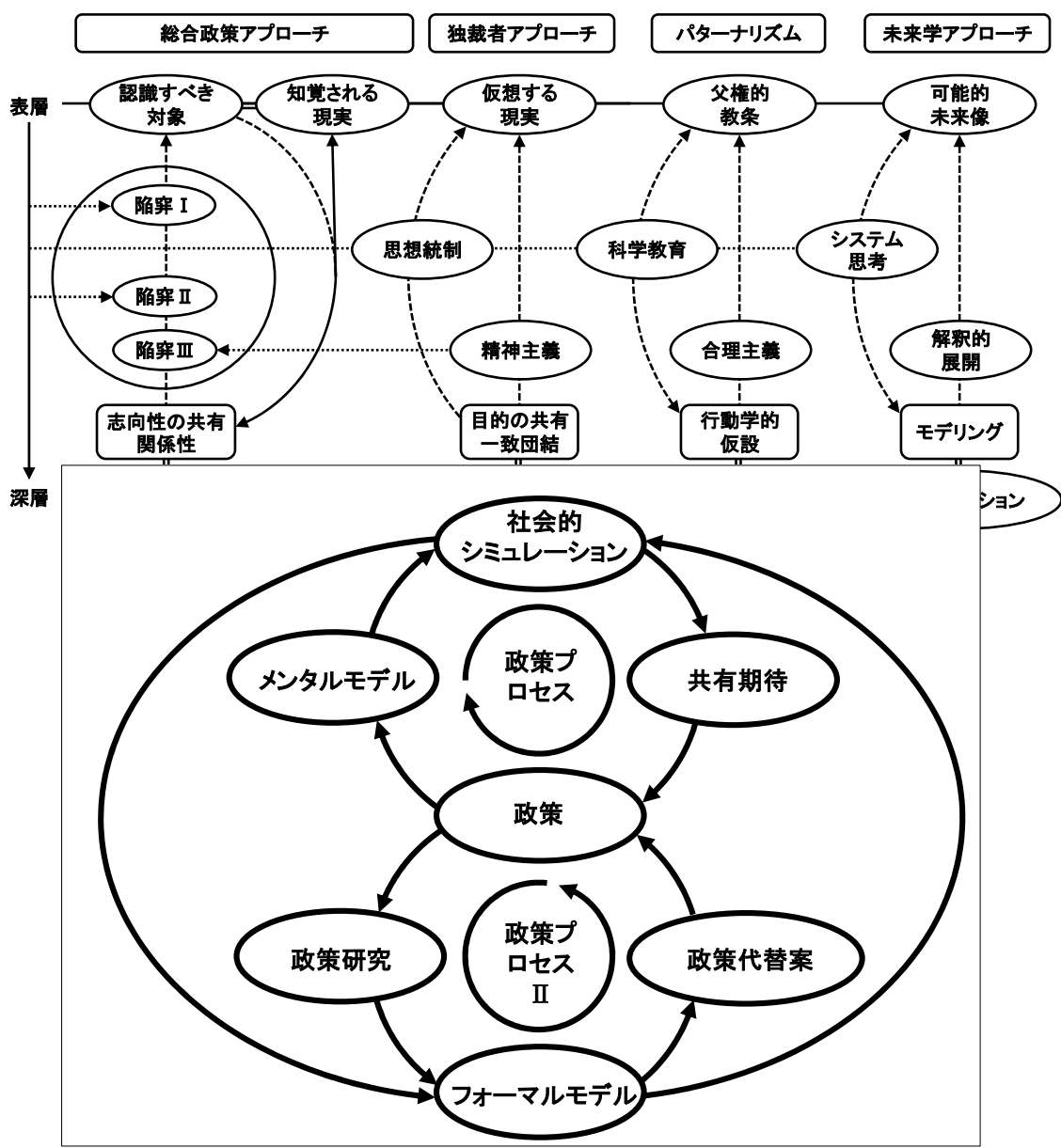
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	
1	DT				平清化定数													
2	1				1													
3	Year	民間消費	GDP	所得	消費性向	消費性向										所得y		
4	1970	35.592439	76.539308	67.875908	0.5243751	1970	1980	1990	2000	2010						1970	1980	
5	1971	40.13531	84.215883	76.539308	0.5243751	0	0.5244	0.5675	0.5507	0.5515	0.5903					0	67.8759	231.1954
6	1972	46.326376	96.418344	84.215883	0.5500907	1	0.5244	0.5571	0.5394	0.5486	0.5721					1	76.5393	250.6361
7	1973	55.982095	117.3976	96.418344	0.5806166	2	0.5501	0.5577	0.5276	0.5512	0.5906					2	84.2159	268.8307
8	1974	67.683127	140.09036	117.3976	0.5765291	3	0.5806	0.5590	0.5259	0.5565	0.5994					3	96.4183	282.5820
9	1975	78.676017	154.78712	140.09036	0.5616091	4	0.5765	0.5608	0.5420	0.5513	0.5964					4	117.3976	295.3035
10	1976	88.904505	173.82776	154.78712	0.5743663	5	0.5616	0.5597	0.5466	0.5596	0.5862					5	140.0904	313.1453
11	1977	99.399334	193.70628	173.82776	0.5718266	6	0.5744	0.5476	0.5463	0.5518	0.5637					6	154.7871	333.6860
12	1978	109.46442	213.30627	193.70628	0.5651052	7	0.5718	0.5455	0.5424	0.5519	0.5634					7	173.8278	350.3448
13	1979	120.75654	231.19536	213.30627	0.5661181	8	0.5661	0.5510	0.5307	0.5547						8	193.7063	366.3391
14	1980	131.2113	250.6361	231.19536	0.5675343	9	0.5661	0.5483	0.5395	0.5498						9	213.3063	393.6414
15	1981	139.639	268.8307	250.6361	0.5571384													
16	1982	149.9266	282.582	268.8307	0.557699	yz										消費z		
17	1983	157.9616	295.3039	282.582	0.5589938	1970	1980	1990	2000	2010						1970	1980	
18	1984	165.6125	313.1453	295.3039	0.5608206	0	2415.9	30335.4	97821.9	148926.3	141444.4					0	35.592	131.211
19	1985	175.2522	333.686	313.1453	0.5596514	1	3071.9	34998.6	110994.9	152182.5	143228.8					1	40.135	139.639
20	1986	182.742	350.3448	333.686	0.5476466	2	3901.4	40304.9	123006.7	150763.4	142627.2					2	46.326	149.927
21	1987	191.1149	366.3391	350.3448	0.5455052	3	5397.7	44637.1	128876.7	148165.5	146840.2					3	55.982	157.962
22	1988	201.8687	393.6414	366.3391	0.5510433	4	7945.8	48906.0	132956.7	149092.6	150994.5					4	67.683	165.613
23	1989	215.8512	421.4694	393.6414	0.5483448	5	11021.8	54879.4	137504.1	151883.9	154784.9					5	78.676	175.252
24	1990	232.0973	453.6085	421.4694	0.550686	6	13761.3	60978.4	143515.6	154327.7	159520.6					6	88.905	182.742

コマンド統計データ115%

所得y	消費z	統計データ
0	67.8759	231.1954
1	76.5393	250.6361
2	84.2159	268.8307
3	96.4183	282.582
4	117.3976	295.3039
5	140.0904	313.1453
6	154.7871	333.686
7	173.8278	350.3448
8	193.7063	366.3391
9	213.3063	393.6414

第2章 パワポ利用技術

図のようなパワポ・プレゼン形式の教材が多数を占めるので、今回のドラフトにおいては、限られた、紙幅の都合上、掲載を割愛する



第3章 基礎概念の理解

本章は完全な試作段階にあって、以下に示すのは初期試作品ないし執筆用資料に過ぎない。特に数学に関する部分は大幅に改定される予定である。

[1] DYNAMOPⅢをダウンロードして開け。マクロは有効にすること。

[2] A列に次のように記入せよ。

L	預金残高=預金残高+利息
R	利息=年利率*預金残高
C	年利率=0.1
N	預金残高=元金
C	元金=100
PLOT	預金残高
SPEC	DT=1/LENGTH=10/PRTPER=1/PLTPER=1

【解説 1】 方程式について

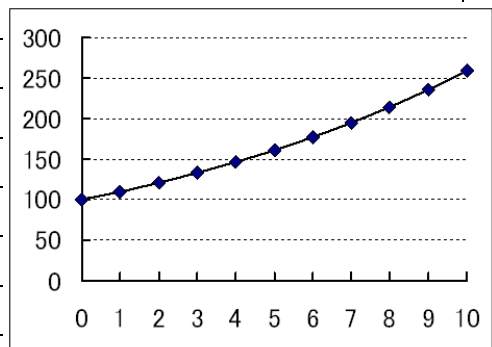
L, R, C, N, PLOT, SPEC DT=1/LENGTH=10/PRTPER=1/PLTPER=1 という初めて見る記号を無視すれば、これが、**預金残高**に年々の**利息**が組み入れられて年末ごとに**預金残高**が成長して行くシステムを表している、と読み取ることができる。(もしそうは読めないということであれば、納得行くまで **instructor** に質問し続けよ。先に進んではならない!)

納得できたら[3]に進め。

[3] マクロを実行せよ。

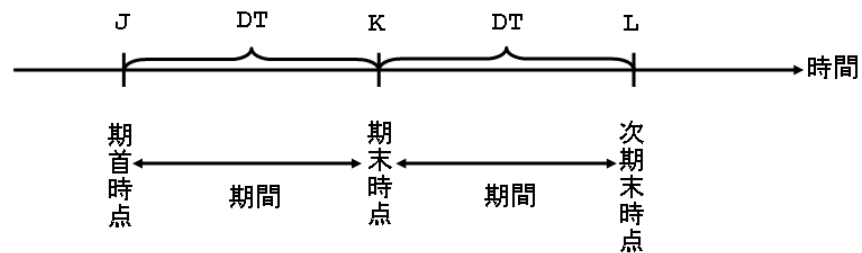
次の結果を得る：

L	預金残高.K=預金残高.J+利息.JK
R	利息.KL=年利率×預金残高.K
C	年利率=0.1
N	預金残高=元金
C	元金=100
PLOT	預金残高
SPEC	DT=1/LENGTH=10/PRTPER=1/PLTPER=1



【解説 2】 時間添字 .J, .K, .L について

預金残高と利息の尻に **.K, .J, .JK, .KL** という記号が付されたことを確認せよ。
これらを時間添字と言う。



[4] 2行追加せよ。

L	預金残高. K =預金残高. J +利息. JK
R	利息. KL =年利率×預金残高. K
C	年利率=0.1
N	預金残高=元金
C	元金=100
PLOT	預金残高
SPEC	DT=1/LENGTH=10/PRTPER=1/PLTPER=1
A	元利合計=元金*(1+年利率) ^{TIME}
PLOT	元利合計

【解説 3】 方程式記号 **L, R, C, N, A** について

- L (Level)** : レベル方程式
- R (Rate)** : レイト方程式
- C (Constant)** : 定数
- N (iNitial)** : 初期値
- A (Auxiliary)** : 補助方程式

【解説 4】 元利合計.**K**=元金×(1+年利率)^{TIME}.**K** について

t 年後の預金残高を $y(t)$ と書くことにすると、年利率を r として預金残高は

$$y(t)=y(t-1)+y(t-1) \times r$$

と表される。これは

$$y(t)=y(t-1) \times (1+r)=y(t-2) \times (1+r)^2=y(t-3) \times (1+r)^3=\cdots=y(0) \times (1+r)^t$$

であるから、 $y(0)=y_0$ =元金が与えられれば

$$y(t)=y_0 \times (1+r)^t=\text{元金} \times (1+\text{年利率})^{\text{TIME}} . \mathbf{K}=\text{元利合計} . \mathbf{K}$$

となり、マクロを実行すれば預金残高と元利合計のプロット結果は正確に重なる。したがって両者は同じものである。このとき①を定差方程式、②を初期条件と言い、③を初

期条件②の下における定差方程式①の解と言う。

$$\textcircled{1} \quad y(t)=y(t-1) \times (1+r) \quad \text{定差方程式}$$

$$\textcircled{2} \quad y(0)=y_0 \quad \text{初期条件}$$

$$\textcircled{3} \quad y(t)=y_0 \times (1+r)^t \quad \text{解}$$

【解説 5】 PLOT, SPEC 等について

PLOT はプロット出力変数の並びを指定する文である。

PRINT はプリント出力変数の並びを指定する文である。

SPEC はシミュレーション実行と出力の仕様を指定する文である。

DT : 1 期間の長さ LENGTH : 実行時間の長さ

PRTPER : プリント出力の時間間隔 PLTPER : プロット出力の時間軸刻み幅

[5] 以下の半年複利システムを考察せよ。

L	預金残高 . K=預金残高 . J+0.5×利息 . JK
R	利息 . KL=年利率×預金残高 . K
C	年利率=0.1
N	預金残高=元金
C	元金=100
PLOT	預金残高
SPEC	DT=0.5/LENGTH=10/PRTPER=1/PLTPER=0.5
A	元利合計 . K=元金×(1+0.5×年利率)^(2×TIME . K)
PLOT	元利合計

【解説 6】 半年複利システムとは年に 2 回利息を元金に組み入れるシステムである。

[6] 以下の四半年複利システムを考察せよ。

L	預金残高 . K=預金残高 . J+0.25×利息 . JK
R	利息 . KL=年利率×預金残高 . K
C	年利率=0.1
N	預金残高=元金
C	元金=100
PLOT	預金残高
SPEC	DT=0.25/LENGTH=10/PRTPER=1/PLTPER=0.25
A	元利合計 . K=元金×(1+0.25×年利率)^(4×TIME . K)
PLOT	元利合計

【解説 7】 四半年複利システムとは年に 4 回利息を元金に組み入れるシステムである。

[7] 年に m 回利息を組み入れる複利計算システムは次のように書くことができる。

ただし、 h のところには $1/m$ の値が代入されるものとする。

L	預金残高 . K=預金残高 . J+DT×利息 . JK
---	------------------------------

R	利息. $KL = \text{年利率} \times \text{預金残高} . K$
C	年利率=0.1
N	預金残高=元金
C	元金=100
PLOT	預金残高
SPEC	$DT=h/LENGTH=10/PRTPER=1/PLTPER=h$
A	元利合計. $K = \text{元金} \times (1 + DT \times \text{年利率})^{(TIME . K / DT)}$
PLOT	元利合計

以上を DYNAMOPⅢ を用いて確かめよ。

【解説 8】 年 m 回複利計算システムの定差方程式、初期値、解は次のようになる。

年 1 回複利計算システム			年 m 回複利計算システム		
定差方程式	①	$y(t) = y(t-1) \times (1+r)$	定差方程式	④	$y(t) = y(t-h) \times (1+hr)$
初期条件	②	$y(0) = y_0$	初期条件	⑤	$y(0) = y_0$
解	③	$y(t) = y_0 \times (1+r)^t$	解	⑥	$y(t) = y_0 \times (1+hr)^{t/h}$

○ 定差方程式 ④ を変形：

$$y(t) = y(t-h) \times (1+hr) \rightarrow y(t) = y(t-h) + hr \times y(t-h) \rightarrow y(t) - y(t-h) = hr \times y(t-h)$$

$$\rightarrow [y(t) - y(t-h)]/h = r \times y(t-h) \dots\dots ⑦$$

$h \rightarrow 0$ とするとき ⑦ 式は 微分方程式： $y' = ry$ となる。

○ 解 ⑥ を変形：

$$y(t) = y_0 \times (1+hr)^{t/h} = y_0 \times (1+r/m)^{mt} = y_0 \times [\{ 1 + 1/(m/r) \}^{m/r}]^n$$

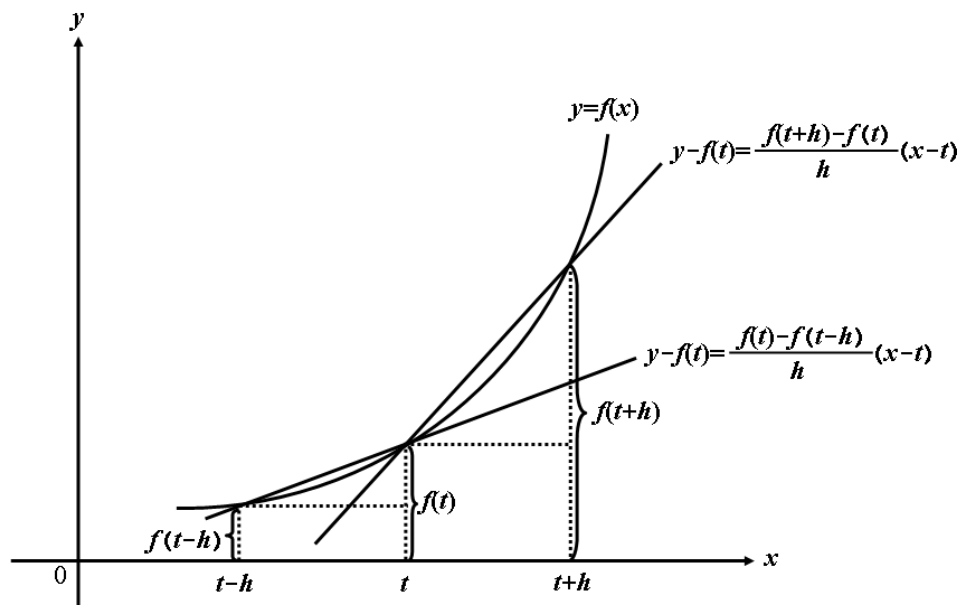
$$h \rightarrow 0 \text{ とするとき } m \rightarrow \infty \text{ だから } [\{ 1 + 1/(m/r) \}^{m/r}]^n \rightarrow e^{rt}$$

となる。

よって次の年無限回複利計算システムを得る。

年無限回複利計算システム		
微分方程式	④	$y' = ry$
初期条件	⑤	$y(0) = y_0$
解	⑥	$y(t) = y_0 \times e^{rt}$

【最低限数学知識の補足 1】 $y = f(x)$ と点 $(t, f(t))$ における接線について



- (1) 関数 $y = f(x)$ の表す曲線を指させ。
- (2) 点 $(t, f(t))$ が曲線上にあることを確かめよ。
- (3) 点 $(t, f(t))$ と点 $(t+h, f(t+h))$ を通る直線の方程式を示せ。
- (4) 点 $(t, f(t))$ と点 $(t-h, f(t-h))$ を通る直線の方程式を示せ。

【最低限数学知識の補足 2】 微分係数

1) 上図で $h \rightarrow 0$ とすると 2 本の直線は重なって点 $(t, f(t))$ における接線と等しくなる。このことを確認せよ。このときの接線の傾きを $x = t$ における $y = f(x)$ の微分係数と言う。微分係数を $f'(t)$ と書く。これにより接線の方程式は $y - f(t) = f'(t)(x - t)$ と書き表される。

2) 「2 本の直線は $h \rightarrow 0$ によって接線と重なる。接線の傾きを微分係数 $f'(t)$ と名づける」と言うのを、数学は「接線の方程式は $y - f(t) = f'(t)(x - t)$ である。ただし $x = t$ における微分係数を $f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} [\{f(t+h) - f(t)\}/h] = \lim_{h \rightarrow 0} [\{f(t) - f(t-h)\}/h]$ とする」と言う。

3) t は x 軸上のどこにとっても良いから、微分係数は x の関数となる。これを y' または $f'(x)$ と書いて y の導関数と言う。与えられた関数 $y = f(x)$ の導関数を求めることを、「 y を x で微分する」または「 $f(x)$ を x で微分する」と言う。

例) 関数 $y = x^3$ を x で微分すると導関数 $y' = (x^3)' = 3x^2$ が得られる。

$$\begin{aligned} \text{なぜならば、} \{ (x+h)^3 - x^3 \} / h &= (x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 - x^3) / h = 3x^2 + 3hx + h^2 \\ \{ x^3 - (x-h)^3 \} / h &= (x^3 - x^3 + 3hx^2 - 3h^2x + h^3) / h = 3x^2 - 3hx + h^2 \end{aligned}$$

により $\lim_{h \rightarrow 0} [\{ (x+h)^3 - x^3 \} / h] = \lim_{h \rightarrow 0} [\{ x^3 - (x-h)^3 \} / h] = 3x^2$ となるからである。

【最低限数学知識の補足 3】 微分

2本の直線が $h \rightarrow 0$ によって1本に重なったものが点 $(t, f(t))$ における接線であるから、点 $(t+h, f(t+h))$ はこの接線上に在る。つまり接線の方程式 $y - f(t) = f'(t)(x - t)$ に $x = t + h, y = f(t+h)$ を代入して $f(t+h) - f(t) = f'(t)(t+h-t) = f'(t)h$ が成り立つ。任意の $h > 0$ に対する接線上の y 軸方向の変化を $dy = f(t+h) - f(t)$ と書くことにすると $dy = f'(t)h$ を得る。これを $x = t$ における $y = f(x)$ の微分という。 x の微分は $dx = x'h$ だから、 $x' = 1$ を用いて、常に $h = dx$ である。よって $x = t$ における y の微分は $dy = f'(t)dt$ 、あるいは同じことだが $dy = f'(x)dx$ と書き表される。

【最低限数学知識の補足 4】 微分の公式

1) 合成関数 $y = f(g(x))$ について $y' = f'(g(x))g'(x)$ が成り立つ。 $z = g(x)$ とすると、 $y = f(z)$ の微分は $dy = f'(z)dz$ 、 $z = g(x)$ の微分は $dz = g'(x)dx$ だから、 $dy = f'(z)g'(x)dx$ となるからである。これを合成関数の微分の公式と言う。

2) $y = f(x)$ の逆関数を $x = g(y)$ とするとき $f'(x) = 1/g'(y)$ が成り立つ。 $dx = g'(y)dy$ より $dy = 1/g'(y)dx$ となるからである。これを逆関数の微分の公式と言う。

3) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ である。

各々の微分をとって $f(x+h) = f(x) + f'(x)h$, $g(x+h) = g(x) + g'(x)h$ と置くと

$$\begin{aligned} [f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)]/h &= [f'(x)g(x)h + f(x)g'(x)h + f'(x)g'(x)h^2]/h. \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + f'(x)g'(x)h \end{aligned}$$

である。 $h \rightarrow 0$ とすると、左辺 $\rightarrow [f(x)g(x)]'$ 、右辺 $\rightarrow f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ となる。これを積の微分の公式と言う。

【最低限数学知識の補足 5】 e

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$

二項展開： $(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + {}_nC_2 x^{n-2}y^2 + \cdots + {}_nC_r x^{n-r}y^r + \cdots + {}_nC_{n-2} x^2 y^{n-2} + nxy^{n-1} + y^n$

組合わせ： ${}_nC_r = n! / \{r! \times (n-r)!\} = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1) / \{r(r-1)(r-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1\}$

$$\begin{aligned} (1 + 1/n)^n &= 1^n + n1^{n-1}(1/n) + {}_nC_2 1^{n-2}(1/n^2) + {}_nC_3 1^{n-3}(1/n^3) + \cdots + {}_nC_r 1^{n-r}(1/n^r) + \cdots \\ &\quad \cdots + {}_nC_{n-2} 1^2(1/n^{n-2}) + n1(1/n^{n-1}) + (1/n^n) \\ &= 1 + n(1/n) + n(n-1)(1/n^2)/2! + n(n-1)(n-2)(1/n^3)/3! + \cdots \\ &\quad + n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)(1/n^r)/r! + \cdots \\ &\quad + n(n-1)(1/n^{n-2})/2! + n(1/n^{n-1}) + (1/n^n) \\ &= 1 + 1 + (n/n)(1-1/n)/2! + (n/n)(1-1/n)(1-2/n)/3! + \cdots \\ &\quad + (n/n)(1-1/n)(1-2/n) \cdots \{1-(r-1)/n\}/r! + \cdots \\ &\quad + (n/n)(1-1/n)(1/n^{n-4})/2! + (1/n^{n-2}) + (1/n^n) \\ &\rightarrow 1 + 1 + 1/2! + 1/3! + \cdots + 1/r! + \cdots + 0 + 0 + 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

DYNAMPⅢを開き、次のように記入して実行せよ。

A	R!=FACT(R)
A	R=TIME

L E=E+1/R!
N E=0
PRINT R!,E
SPEC DT=1/LENGTH=20/PRTPER=1/PLTPER=1

参考として任意のセルに **=EXP(1)** と記入して Enter キー を押してみよ。

エクセルの **FACT()** は階乗関数を、**EXP()** は指数関数を参照する。

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e$

一般の $x > 0$ に対して、適当な整数 n を採れば $n \leq x < n+1$ とすることができる。このような n に対して、不等式: $\{1+1/(n+1)\}^n < (1+1/x)^x < (1+1/n)^{n+1}$ が成り立つ。この式の第1辺は $\{1+1/(n+1)\}^{n+1} / \{1+1/(n+1)\}$ であるから、この値は $n \rightarrow \infty$ とするとき極限值 e に収束する。何故なら $m = n+1$ とおけば $n \rightarrow \infty$ のとき $m \rightarrow \infty$ 、 $(1+1/m)^m \rightarrow e$ 、 $1+1/m \rightarrow 1$ だからである。また第3辺は $(1+1/n)^n \times (1+1/n)$ であるから $n \rightarrow \infty$ とするとき同じく e に収束する。したがって任意の $\varepsilon > 0$ に対して一つの正数 N を採って $n \geq N$ になるとき $e - \varepsilon < \{1+1/(n+1)\}^n$ 、 $(1+1/n)^{n+1} < e + \varepsilon$ となるようにすることができる。そのような n に対して $n \leq x < n+1$ となる x については、常に $e - \varepsilon < (1+1/x)^x < e + \varepsilon$ であるから $|(1+1/x)^x - e| < \varepsilon$ である。すなわちどんなに小さな $\varepsilon > 0$ に対しても N を大きくしてやることによって $(1+1/x)^x$ と e との差がそれよりも小さくなるように x を大きくとることができる。これは正しく

$\lim_{x \rightarrow \infty} (1+1/x)^x = e$ と言っているのに等しい。

これにより年無限回複利計算システムの時点 t における元利合計は

$$y(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} y_0 (1 + r/m)^{mt} = \lim_{m/r \rightarrow \infty} y_0 [\{1 + 1/(m/r)\}^{m/r}]^r = y_0 e^{rt}.$$

【最低限数学知識の補足 6】 $y = e^x$

1) 導関数と原始関数

すべての整数 n に対して x^n の導関数は nx^{n-1} である。逆に言えば、微分して x^{n-1} になる関数は x^n/n である。これを、 x^n/n は x^{n-1} の原始関数である、と言う。原始関数は一つだけではない。 x^n/n が x^{n-1} の原始関数であれば任意の定数 C を足した $x^n/n + C$ もまた x^{n-1} の原始関数である。ところが、「 x^{n-1} の原始関数は $x^n/n + C$ である」はすべての整数 n に対しては成立しない。 $n = 0$ の場合を除かなくてはならない。 $x^0/0$ は x^{-1} の原始関数ではないからである。

x^3 を微分すると $3x^2$, x^2 を微分すると $2x$, x^1 を微分すると 1 , x^0 を微分すると 0 , x^{-1} を微分すると $-x^{-2}$ である。すなわち $1/x$ を微分すると $-1/x^2$ となるのに対し、微分して $1/x$ となる関数は有理式で表すことができない。

2) 自然対数

微分して $1/x$ となる関数を $f(x)$ とする。任意定数を $f(1) = 0$ で定める。当分、 $x > 0$ の場合を考える。 $f'(x) = 1/x > 0$ だから $f(x)$ は単調増加関数である。 $f(1) = 0$ だから、 $x > 1$ の範囲で正 ($f(x) > 0$)、 $0 < x < 1$ の範囲で負 ($f(x) < 0$) の値を取る。

a を定数とすると合成関数の微分の公式により $f'(ax) = a/(ax) = 1/x$ だから $f(ax)$ も原始関数の一つである。よって定数 c により $f(ax) = f(x) + c$ と書ける。 $x = 1$ を代入すると $f(a) = c$ を得る。よって $f(ax) = f(a) + f(x)$ である。すなわち、この関数は積を和に分解する。よって、 $f(x^n) = nf(x)$ となる。

$x = f(y)$ の逆関数を $y = \exp(x)$ と書く。 $f(1) = 0$ より $\exp(0) = 1$ である。逆関数の微分の公式により、 $[\exp(x)]' = 1/f'(y) = 1/(1/y) = y = \exp(x)$ である。すなわち $\exp(x)$ は微分しても $\exp(x)$ のまま変わらない。さらに、 $\exp(a) = x$, $\exp(b) = y$ と置くと $f(x) = a$, $f(y) = b$ だから $\exp(a + b) = \exp[f(x) + f(y)] = \exp[f(xy)] = xy = \exp(a) \cdot \exp(b)$ である。すなわち、 $\exp(x)$ は和を積に分解する。よって、 $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$ となる。

ここで $\exp(1) = e$ とおけば $\exp(n) = [\exp(1)]^n = e^n$ である。 p, q を整数として $x = p/q$ (ただし $q > 0$) とすれば $[\exp(x)]^q = \exp(qx) = \exp(p) = e^p$ より $\exp(x) = e^{p/q}$ であるから、すべての有理数 x に対して $\exp(x) = e^x$ である。ところで、関数 $\exp(x)$ はすでにすべての実数 x に対して定義されているから、 $\exp(x)$ の値によって e^x を定義することにすれば、 x が無理数である場合も含めて指数関数 $y = e^x$ が得られたことになる。指数関数の逆関数 $f(y)$ は e を底とする対数 $x = \log_e y$ である。これを対数関数あるいは自然対数と呼ぶ。

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 1/x)^x = e$ 再び

$(1 + 1/x)^x = \exp[x \log_e (1 + 1/x)]$ 。 $h = 1/x$ とおけば、 $x \log_e (1 + 1/x) = [\log_e (1 + h)]/h = [\log_e (1 + h) - \log_e 1]/h$ である。 $h \rightarrow 0$ とするとこの値は $\log_e x$ の $x = 1$ における微分係数 $1/1 = 1$ になる。よって $x \rightarrow \infty$ とするとき $(1 + 1/x)^x \rightarrow \exp(1) = e$ である。

【ダイナモ方程式モデル】 ここで SD 入門に戻って

DYNAMPIIIを開き、次のように記入して実行せよ。

L	資本=資本+DT*投資
R	投資=(目標水準-資本)/調整期間
A	目標水準=外生変数
C	調整期間=2
C	外生変数=100
N	資本=0
PL0T	資本, 投資, 目標水準
SPEC	DT=0.1/LENGTH=10/PRTPER=1/PLTPER=0.5

モデルを次のように改訂して実行せよ。

L	資本=資本+DT*投資
R	計画=(目標水準-資本)/調整期間
R	投資=未実現投資/建設期間
L	未実現投資=未実現投資+DT*(計画-投資)
A	目標水準=外生変数

C 調整期間=1
C 建設期間=2
C 外生変数=100
N 資本=0
N 未実現投資=0
PLOT 資本, 投資, 目標水準
SPEC DT=0.1/LENGTH=20/PRTPER=1/PLTPER=0.5

2行目の方程式を次の式に変更して実行せよ。

R 計画=(目標水準-資本-未実現投資)/調整期間

その2 経済成長論と成長の限界

[1] DYNAMOPⅢをダウンロードして開け。マクロは有効にすること。

[2] A列に次のように記入せよ。

L 資本設備=資本設備+DT×設備投資
R 設備投資=貯蓄性向×生産
A 生産=資本設備/資本係数
C 貯蓄性向=0.25
C 資本係数=2
N 資本設備=100
PLOT 生産
SPEC DT=0.25/LENGTH=10/PRTPER=1/PLTPER=0.25

【解説 1】 経済成長モデル

一国の経済を国民経済 **national economy** という。経済のパフォーマンスはよく **GDP Gross Domestic Product** 国内総生産と呼ばれる指標で表される。これは1年間に国内で生産された付加価値(売上マイナス仕入)の総額である。生産は機械、工場、運搬具等々といった資本設備を利用してなされるが、生産を増やすために資本設備を増大させるには設備投資が必要である。設備投資は機械、工場、運搬具等の増加となって資本設備を増大させるが、これら機械、工場、運搬具等もまた資本設備を用いて生産されるものである。生産は所得となって国民の間に分配され、一部は消費され残りは貯蓄される。貯蓄がすべて設備投資となって資本設備を増大させていけば、経済は成長を続ける。

生産のうち貯蓄される割合を貯蓄性向と呼び、1単位の生産を上げるのに必要な資本設備の水準を資本係数と呼ぶ。

[3] マクロを実行せよ。

次の結果を得る：

L	資本設備. $K = \text{資本設備} + DT \times \text{設備投資}$. JK	D	E	F
R	設備投資. $KL = \text{貯蓄性向} \times \text{生産} \cdot K$	TIME	生産	
A	生産. $K = \text{資本設備} \cdot K / \text{資本係数}$	0	50	
C	貯蓄性向=0.25	0.25	51.5625	
C	資本係数=2	0.5	53.1738	
N	資本設備=100	0.75	54.8355	
PLOT	生産	1	56.5491	
SPEC	DT=0.25/LENGTH=10/PRTPER=1/PLTPER=0.25	1.25	58.3163	
		1.5	60.1387	
		1.75	62.018	
		2	63.9561	
		2.25	65.9547	
		2.5	68.0158	
		2.75	70.1413	
		3	72.3332	
		3.25	74.5936	
		3.5	76.9246	
		3.75	79.3285	
		4	81.8076	

【課題】 F 列に成長率を計算する式を記入せよ。

[4] 4 行追加せよ。

L	資本設備. $K = \text{資本設備} + DT \times \text{設備投資}$. JK
R	設備投資. $KL = \text{貯蓄性向} \times \text{生産} \cdot K$
A	生産. $K = \text{資本設備} \cdot K / \text{資本係数}$
C	貯蓄性向=0.25
C	資本係数=2
N	資本設備=100
PLOT	生産
SPEC	DT=0.25/LENGTH=10/PRTPER=1/PLTPER=0.25
A	成長率=(生産-前期生産)/前期生産/DT
L	前期生産=前期生産+DT×(生産-前期生産)/DT
N	前期生産=生産
PLOT	前期生産, 成長率

【解説 2】 成長率は年々の GDP の成長を表す。

故に毎四半期の成長率を DT で割って年率に直さなければならない。

【解説 3】 適正成長率という概念

資本設備を x , 設備投資を z とすると $x \cdot K = x \cdot J + DT \times z \cdot JK$ だから $x \cdot K - x \cdot J = DT \times z \cdot JK$ 生産を y , 貯蓄性向を s , 資本係数を v と書くことにすると $y = x/v$ より $x = v \times y$ となるから、 $z = s \times y$ より、資本設備の式は $v \times y \cdot K - v \times y \cdot J = DT \times s \times y \cdot J$ となる。時間添字 $\cdot K$ を (t) に $\cdot J$ を $(t-dt)$ に書き直せば、 $v[y(t) - y(t-dt)] = DT \times s \cdot y(t-dt)$ である。これは $v dy = s y dt$ すなわち微分の式: $dy = g y dt$ (ただし $g = s/v$) と等しい。 $dt \rightarrow 0$ のとき $y' = gy$ となる。これは年利 g による年無限回の複利計算の式と同一である。したがって初期値 $y(0) = y_0$ が与えられれば、経済成長は成長曲線: $y(t) = y_0 e^{gt}$ に従うと言い得る。 g を経済学では適正成長率と呼ぶ。

上述の SD モデルでは $s = \text{貯蓄性向} = 0.25$, $v = \text{資本係数} = 2$ と与えていた。これによる適正成長率は $g = s/v = 0.25/2 = 0.125$ である。シミュレーション結果も確かに一定の成長

率 12.5%を示していることを確かめよ。

【解説 4】 成長率の計算法

成長率の計算式：成長率・ $K=(\text{生産}・K-\text{前期生産}・K)/\text{前期生産}・K/DT$ は解説 012 の表記法を用いれば $[y(t)-y(t-dt)]/y(t-dt)/dt$ と書き直すことができる。これは $(dy/y)/dt$ とも書くことができる。ところで y の対数 $\log y$ の微分は $d \log y=dy/y$ であるから成長率の計算式はすなわち $(dy/y)/dt=d \log y/dt$ (対数をとって時間で微分する) となる。

【課題】 成長率の方程式を次式で置き換えてこのことを確かめよ。

A 成長率= $(\text{LN}(\text{生産})-\text{LN}(\text{前期生産}))/DT$

注意) $dt \rightarrow 0$ の近似とするには $DT=0.25$ では大きすぎるかも知れない。

[5] 成長率計算の代替的方法を追加せよ。

L	資本設備・ $K=\text{資本設備}・J+DT \times \text{設備投資}・JK$
R	設備投資・ $KL=\text{貯蓄性向} \times \text{生産}・K$
A	生産・ $K=\text{資本設備}・K/\text{資本係数}$
C	貯蓄性向=0.25
C	資本係数=2
N	資本設備=100
PLOT	生産
SPEC	$DT=0.25/\text{LENGTH}=10/\text{PRTPER}=1/\text{PLTPER}=1$
A	成長率・ $K=(\text{生産}・K-\text{前期生産}・K)/\text{前期生産}・K/DT$
L	前期生産・ $K=\text{前期生産}・J+DT \times (\text{生産}・J-\text{前期生産}・J)/DT$
N	前期生産=生産
PLOT	前期生産, 成長率
A	微分近似成長率= $(\text{対数生産}-\text{対数前期生産})/DT$
A	対数生産= $\text{LN}(\text{生産})$
A	対数前期生産= $\text{LN}(\text{前期生産})$
PLOT	対数生産, 対数前期生産, 微分近似成長率
A	指数遅れ成長率=生産/指数遅れ生産-1
L	指数遅れ生産=指数遅れ生産+ $DT \times (\text{生産}-\text{指数遅れ生産})/1$
N	指数遅れ生産=生産/ $(1+\text{成長率初期値})$
C	成長率初期値=0
PLOT	指数遅れ生産, 指数遅れ成長率

【解説 5】 T 年前の生産 の表し方

① DT 年前の生産

レベル方程式：

$$L \quad \text{前期生産} \cdot K = \text{前期生産} \cdot J + DT \times (\text{生産} \cdot J - \text{前期生産} \cdot J) / DT$$

$$N \quad \text{前期生産} = \text{生産}$$

によって DT 年だけ前の生産を定義したが、右辺の第 2 項以下を展開すると

$$\text{前期生産} \cdot K = \text{前期生産} \cdot J + \text{生産} \cdot J - \text{前期生産} \cdot J = \text{生産} \cdot J$$

となるから、前期生産は正しく DT 年だけ前の生産を表していることが解る。

② T 年前の生産

$$L \quad \text{指数遅れ生産} \cdot K = \text{指数遅れ生産} \cdot J + DT \times (\text{生産} \cdot J - \text{指数遅れ生産} \cdot J) / \text{平均遅れ}$$

$$N \quad \text{指数遅れ生産} = \text{生産}$$

$$C \quad \text{平均遅れ} = T$$

によって平均 T 年だけ前の生産を定義しよう。

時点 t における生産の値を y_t と書くことにすると、四半期 $DT (=0.25 \text{ 年})$ だけ前の生産は y_{t-h} となる。半年前の生産は y_{t-2h} 、3 四半期前の生産は y_{t-3h} である。

これにより、時系列データ $\{y_{t-h}, y_{t-2h}, y_{t-3h}, \dots, y_{t-nh}, \dots\}$ が与えられたとせよ。

$DT=0.25$ は $h=1/m$ とするとき、 $m=4$ (年 4 回)、 $h=0.25$ (四半期毎) を意味している。

時点 t において、ウェイト関数 ω_{nh} によって加重平均：

$$A_t = \omega_h y_{t-h} + \omega_{2h} y_{t-2h} + \omega_{3h} y_{t-3h} + \dots + \omega_{nh} y_{t-nh} + \dots$$

を作る。ただし、 $\omega_h + \omega_{2h} + \omega_{3h} + \dots + \omega_{nh} + \dots = 1$ である。

① T 年前の生産はデータの mT 番目であるから $n=mT$ を代入して $y_{t-nh} = y_{t-mTh} = y_{t-T}$ である。ウェイトが $\omega_h = \omega_{2h} = \omega_{3h} = \dots = \omega_T = \mu h > 0$ で、 $\omega_k = 0$ for $k > T$ という長方形分布の密度関数で与えられたとき、 A_t は過去 T 年間の算術平均を表している。ただし $\mu = 1/T$ 。

$$A_t = \mu h [y_{t-h} + y_{t-2h} + y_{t-3h} + \dots + y_{t-T}] = [y_{t-h} + y_{t-2h} + y_{t-3h} + \dots + y_{t-T}] / (mT)$$

② ウェイトが $\omega_k = \mu h (1-\mu h)^{mk-1}$ for $k=h, 2h, 3h, \dots$ という幾何分布の密度関数で与えられたとき、加重平均は

$$A_t = \mu h [y_{t-h} + (1-\mu h)y_{t-2h} + (1-\mu h)^2 y_{t-3h} + (1-\mu h)^3 y_{t-4h} + \dots]$$

となる。同様にして DT だけ前の加重平均を書き下してみると次のようになっている：

$$A_{t-h} = \mu h [y_{t-2h} + (1-\mu h)y_{t-3h} + (1-\mu h)^2 y_{t-4h} + (1-\mu h)^3 y_{t-5h} + \dots]$$

両辺に $(1-\mu h)$ 乗じて

$$(1-\mu h)A_{t-h} = \mu h [(1-\mu h)y_{t-2h} + (1-\mu h)^2 y_{t-3h} + (1-\mu h)^3 y_{t-4h} + \dots]$$

A_t から片々引き算すると

$$A_t - (1-\mu h)A_{t-h} = \mu h y_{t-h}$$

整理すると

$$A_t = A_{t-h} + h(y_{t-h} - A_{t-h})\mu$$

$$A_t = A_{t-h} + DT \times (y_{t-h} - A_{t-h}) / T$$

$$A \cdot K = A \cdot J + DT \times (y \cdot J - A \cdot J) / T$$

を得る。これを指数平滑法のレベル方程式という。

過去への遡り時間 k の期待値は

$$E(k) = \sum k \mu h (1-\mu h)^{mk-1} = \mu h [h + (1-\mu h)2h + (1-\mu h)^2 3h + (1-\mu h)^3 y_{t-4h} + \dots] = 1/\mu = T$$

となるから、 A は平均的に T 年過去に遡った指数平均値を表している、と云う※。

$A.K = A.J + DT \times (y.J - A.J) / T$ の両辺を T 倍すると、

$$T A.K = T A.J + DT \times (y.J - A.J)。$$

改めて $B.K = T A.K$, $z.KL = A.K$, $x.KL = y.K$ と書き直すと、上式は、

$$B.K = B.J + DT \times (x.JK - z.JK) \quad \text{および} \quad z.KL = B.K / T$$

と書き改められる。この2式を一組にして指数遅れと謂う。

※ $x=k-h$ とおくと幾何分布の確率 $\omega_x = \mu h (1-\mu h)^{mx}$ for $x=0, h, 2h, 3h, \dots$ は $m \rightarrow \infty$ で、指数分布の確率: $f(x) dx = \mu e^{-\mu x} dx$ に収束する。指数平滑法の名の由来である。

[6] A列に次のように記入せよ。

L	人口.K=人口.J+DT×(出生.JK-死亡.JK)
R	出生=出生率×人口
R	死亡=死亡率×人口
L	食糧.K=食糧.J+DT×(生産.JK-消費.JK)
R	消費=消費係数×人口
R	生産=生産係数×人口^弾力性
A	出生率=TABHL(出生率データ, 1人当たり食糧, 0, 0.5, 0.05)
T	出生率データ=.01/.01/.011/.014/.018/.025/.032/.036/.038/.039/.0395
A	死亡率=TABHL(死亡率データ, 1人当たり食糧, 0, 0.5, 0.05)
T	死亡率データ=.3/.16/.09/.055/.035/.025/.018/.014/.012/.011/.0105
A	1人当たり食糧=食糧/人口
N	人口=100
N	食糧=100
C	生産係数=1
C	消費係数=0.25
C	弾力性=0.8
PLOT	人口, 食糧
SPEC	DT=0.1/LENGTH=250/PRTPER=1/PLTPER=1

【解説 6】 テーブル関数について

A $y = \text{TABLE}(\text{縦軸名}, x, a_1, a_2, a_3)$ または **A** $y = \text{TABHL}(\text{縦軸名}, x, a_1, a_2, a_3)$

によって定義域を $[a_1, a_2]$ とする独立変数 x の関数を定義する。方程式記号 **T** で始まる行により a_1 から a_2 まで刻み幅 a_3 で増加する x に対応する y の値 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ を与える。

T 縦軸名= $b_1/b_2/\dots/b_n$ ただし $n=(a_2-a_1)/a_3+1$ とする。

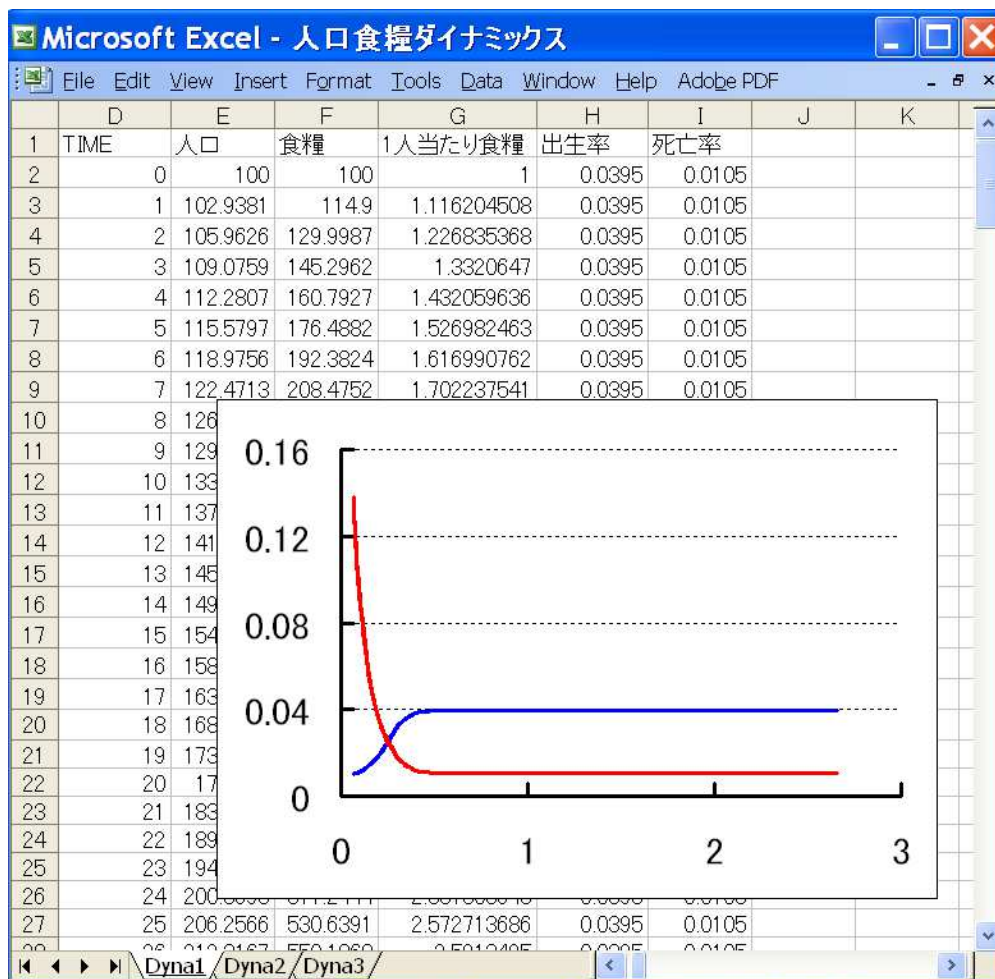
[7] マクロを実行せよ。

[8] PLOT 文を追加せよ。

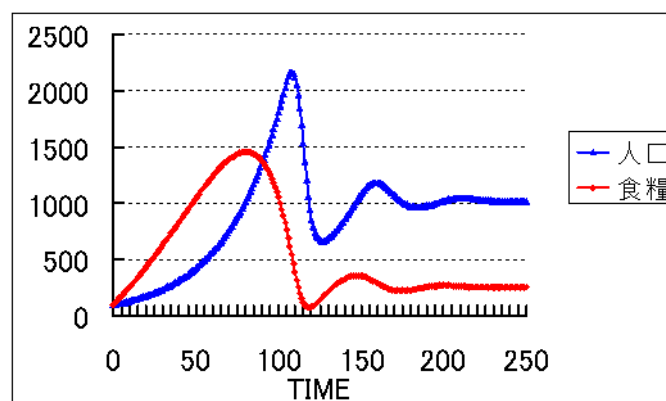
PLOT 1人当たり食糧, 出生率, 死亡率

[9] マクロを実行せよ。

[10] グラフウィザードを使って散布図を作成せよ。



[11] シミュレーション結果を解釈せよ。



その3 フロウダイアグラム

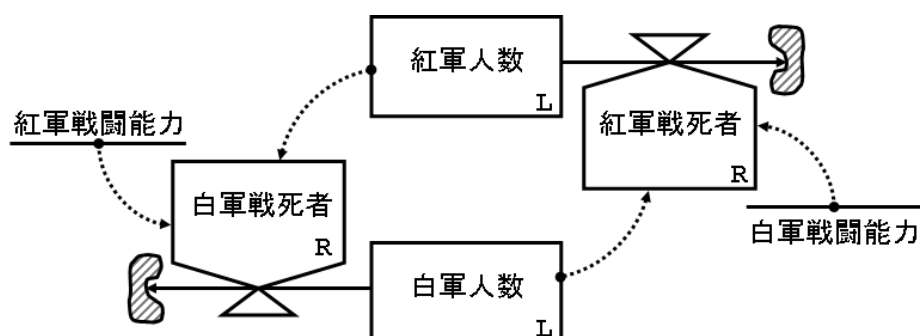
[1] DYNAMOPⅢをダウンロードして開け。マクロは有効にすること。

[2] A列に次のように記入せよ。

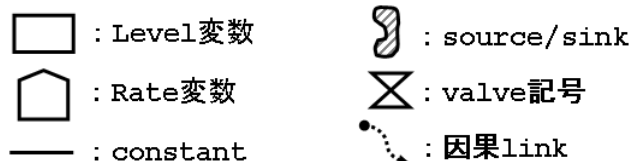
L	紅軍人数=紅軍人数-DT×紅軍戦死者
L	白軍人数=白軍人数-DT×白軍戦死者
R	紅軍戦死者=白軍戦闘能力×白軍人数
R	白軍戦死者=紅軍戦闘能力×紅軍人数
N	紅軍人数=100
N	白軍人数=50
C	紅軍戦闘能力=0.1
C	白軍戦闘能力=0.4
PLOT	紅軍人数, 白軍人数
SPEC	DT=0.1/LENGTH=6/PRTPER=1/PLTPER=0.1

【解説 015】 フロウダイアグラム

ダイナモ方程式[2]のモデルはフローダイアグラムによって表現できる：



【部品】



[3] マクロを実行せよ。

[4] リランを実施せよ。

【解説 016】 ランチェスタモデルの微分方程式

紅軍人数を x , 白軍人数を y , 紅軍戦闘能力を a , 白軍戦闘能力を b とすると、ダイナモ方程式 紅軍人数.K=紅軍人数.J-DT×紅軍戦死者.JK は $x.K-x.J=-DT\times$ 紅軍戦死者.JK であり、また 紅軍戦死者.KL=白軍戦闘能力×白軍人数.K は 紅軍戦死

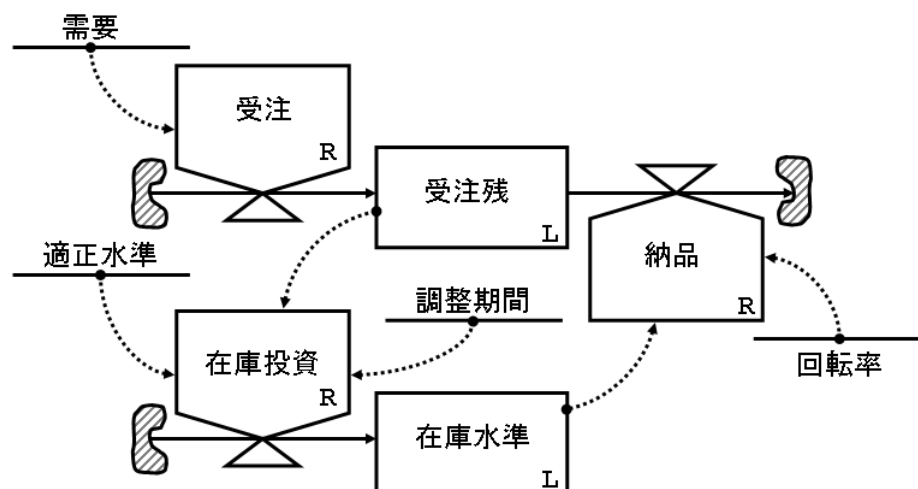
者. $JK=b \times y$. J であるから、微分の式 $dx=-by dt$ を得、微分方程式 $x'=-by$ を得る。すなわち $x'+by=0$ …… ① である。全く同様にして $y'+ax=0$ …… ② を得る。①, ②を同時に満たす解 $x(t), y(t)$ が、マクロの実行結果によってグラフで示されているものの近似になる。

[5] A列に次のように記入せよ。

L	受注残.K=受注残.J+DT×(受注.JK-納品.JK)
L	在庫水準.K=在庫水準.J+DT×在庫投資.JK
R	納品=在庫水準×回転率
R	在庫投資=(受注残-適正水準)/調整期間
R	受注=需要
N	受注残=60
N	在庫水準=30
C	回転率=2
C	適正水準=50
C	調整期間=1
C	需要=80
PL0T	受注残, 在庫水準
SPEC	DT=0.01/LENGTH=12/PRTPER=1/PLTPER=0.1

【解説 017】 フロウダイアグラム

ダイナモ方程式[5]の受注残モデルはフローダイアグラムによっても表現できる：



[6] マクロを実行せよ。

【解説 018】 受注残モデルの微分方程式

受注残を x , 在庫水準を y , 回転率を b , 調整期間を T , 需要を Q , 適正水準を S , とすると、ダイナモ方程式 $x.K=x.J+DT \times (受注.JK-納品.JK)$ は $受注.JK=Q$, $納品.JK=y \times b$ であるから、 $dx=(Q-by)dt$ より $x'=Q-by$ すなわち $x'+by=Q$ …… ①

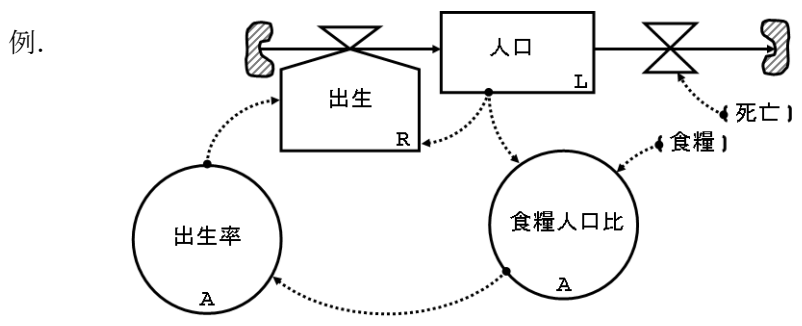
を得る。同様にして $y \cdot K = y \cdot J + DT \times \text{在庫投資} \cdot JK$ は $\text{在庫投資} \cdot JK = (x \cdot J - S) / T$ であるから、 $dy = (x/T - S/T) dt$ より $y' = ax + R$ すなわち $y' - ax = R$ …… ② を得る(ただし $a = 1/T$, $R = -S/T$ とする)。①, ②を同時に満たす解 $x(t)$, $y(t)$ が、マクロの実行結果によるグラフの近似となる。

【課題】

1. 複利計算システムの利息の付き方を表すフローダイアグラムを描け。
2. 経済成長モデルのフローダイアグラムを描け。
3. 人口・食糧モデルのフローダイアグラムを描け。
4. 受注残モデルの改良をフローダイアグラムを描くことによって検討せよ。

【部品追加】

補助変数は円形で表すこと。



その3続き 経済体制論

1. 資本主義モデル

- [1] DYNAMOPⅢをダウンロードして開け。マクロは有効にすること。
- [2] A列に次のように記入せよ。

L	資本. $K = \text{資本} \cdot J + DT \times \text{投資} \cdot JK$
R	投資 = 未実現投資 / 遅れ
L	未実現投資. $K = \text{未実現投資} \cdot J + DT \times (\text{計画} \cdot JK - \text{投資} \cdot JK)$
R	計画 = (目標水準 - 資本) / 調整期間
A	目標水準 = 資本係数 × 需要
A	需要 = 消費 + 投資 + 定数
A	消費 = 消費性向 × 生産
R	生産 = 資本 / 資本係数
N	資本 = 0
N	未実現投資 = 0
C	定数 = 100
C	遅れ = 1
C	調整期間 = 2
C	資本係数 = 1.75

C	消費性向=0.75
PLOT	資本, 投資, 需要, 生産
SPEC	DT=0.25/LENGTH=40/PRTPER=1/PLTPER=0.5

[3] マクロを実行せよ。

[4] リランを実施せよ。

[5] フロウダイアグラムを描け。

2. 社会主義モデル

[6] A列を次のように書き直せ。

L	資本.K=資本.J+DT×投資.JK
R	投資.KL=未実現投資.K/遅れ
L	未実現投資.K=未実現投資.J+DT×(計画.JK-投資.JK)
R	計画.KL=(目標水準.K-資本.K-未実現投資.K)/調整期間
A	目標水準.K=資本係数×需要.K
A	需要.K=消費.K+投資.JK+定数
A	消費.K=消費性向×生産.JK
R	生産.KL=資本.K/資本係数
N	資本=0
N	未実現投資=0
C	定数=100
C	遅れ=1
C	調整期間=2
C	資本係数=1.75
C	消費性向=0.75
PLOT	資本, 投資, 需要, 生産
SPEC	DT=0.25/LENGTH=40/PRTPER=1/PLTPER=0.5

[7] マクロを実行せよ。

[8] リランを実施せよ。

[9] フロウダイアグラムを描け。

第4章 分析概念の理解

4-1. 因果ループ図

因果ループ図の書き方をパワポを使った実習によって習得する。

4-2. システム原型

キム, D.H 他著 『システム・シンキング トレーニングブック』を抜粋引用して
システム原型1～8を習得する。

4-3. モデリング & シミュレーション

SD によるモデリング & シミュレーションの技法をパソコンを使った実習の
形式で習得する。

4-1, 4-2, 4-3 はすべて「水流のアナロジィ」を用いて統一的に
解説がなされる。

【水流のアナロジィ】

古来、人の世は水の流れに喩えられてきた。川畔に立って感慨に耽るのも一興だが、近代人は水の流れにもっと生産的な思い入れを託してアナロジィに興じる。巨大なダム
の建設と水力発電所の経営による電力生産が大都市にエネルギーを供給する一無窮動
への憧憬を産業化社会の未来に附託して、作業ルートを啓開すべく今日も峡谷の岩肌に
ハーケンを打込む槌音が響く—と、ロマンにも存在性の自己確認を求めてしまうのが近
代人の悪い癖—自然と一如となる鑑賞態度とは文化が違うのである。美しい峡谷の風景
には似つかわしくない下世話な話をこれからしようとしている。

貯水池には水が溜まる—山から水が常に流入してくるからである。水門を開き、流入
した分だけ流出させてやると、貯水池の水位は一定に保たれる。このとき単位時間当た
りの水位の変化はゼロである—という。

与えられた時点 t における水位を $z(t)$ と書くことにしよう。任意の長さの短い時間 Δt での水位の変化

$$z(t) - z(t - \Delta t) \quad \text{または} \quad z(t + \Delta t) - z(t) \quad (1)$$

を Δz と書くことにすると、単位時間当たりの水位の変化は $\Delta z / \Delta t$ となる。ここで $/$ は割り算するという記号を表している。 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると $\Delta z / \Delta t \rightarrow dz/dt$ または $\Delta z / \Delta t \rightarrow z'(t)$ と書いて $z(t)$ の時点 t における微分係数または $z(t)$ の導関数が得られる。この極限をとる操作を微分するという。すなわち

$$z'(t) = dz/dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{z(t + \Delta t) - z(t)\} / \Delta t \quad (2)$$

(または)

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{z(t) - z(t - \Delta t)\} / \Delta t \quad (2)'$$

である。

単位時間などというのも耳慣れない言葉であるから、ここで単位時間を 1 分間とすると定めよう—もちろん 1 時間でも 1 日でも構わないが、一度決めたら、途中で記述上の便宜によって随意に変わるというのでは徒に混乱を招くから、以降一貫して、時間といえば分で測ると約束しよう。通常の会話では、水泳なら記録は何秒何々で測り、マラソンなら何時間何分何秒で測る—混在させて当然である—ここで単位時間を 1 分間と決めたら、池江璃花子の 100m バタフライ 56 秒 08 は 0.9347 分、エリウド・キプチョゲのベルリンマラソン 2 時間 1 分 39 秒は 121.65 分と言って初めて比較可能と考えるのである。時間軸を 1 本にしたいからである。

短い時間 Δt は任意の値で構わないのだが、この際、1 分間を n 等分して $\Delta t = 1/n$ 分と決めてしまおう (ただし n は自然数である)。

水位の単位も定めておかねばなるまい。深さ何 m というのが自然であるが、一定であるべき水位が観測点によって区々に変化するのは困りもの—容れ物の形状が変化しないのだから、トンまたは立米で測って水位を表すとしても可笑しくはない—水 1 m^3 は 1 トンだから、その意味でも都合がよい。概念上、容積/底面積が深さだから、貯水池の底面積 $M \text{ m}^2$ を単位と定めれば、水位 1 (トン) というのは深さ $1 (m/M)$ を測ったものとなる—これで水門の位置が決まる。

水面下 1 m の深さに水門を設けたとすれば、それは水位を水面から $1 (m) = M (m/M) = M$ (トン) ほど低下させられる位置を占めることになる—水門を開きつ放しにしたとき、もし新たな流入がないならば、水位を M トン減らした時点で流出は止まる。

流出開始から t 分経過後の水位を $z(t)$ とすれば、時間の関数 $z(t)$ は減衰曲線を描く—と想像するのに苦労は要らないだろう。単位時間の 1 分経過後に水位を最初の 1 m から $r \text{ m}$ ほど下げる勢いで水をドッと放出したとしても、水位が下がるにつれて勢いは衰え、最後はチョロチョロとなって、やがて流出は止まる—水位が最初の $z(0) = M$ (トン) のときは 1 分間に $r M$ トン放出する勢いであつたものが、同じ水門から放出を続

けると t 分経過後には 1 分間に $r z(t)$ トンの勢いに衰えるとする、 t 分後からさらに Δt 分経過後の水位は Δt 分間の流出量だけ下がって

$$z(t+\Delta t) = z(t) - r z(t) \Delta t \quad (3)$$

となる。すなわち水位の減衰率は一定で $r \Delta t$ であると仮定していることになる。このとき減衰率は

$$r M (\text{トン/分}) \div M (\text{トン}) \times \Delta t (\text{分}) = r \Delta t$$

と求めた結果だから無単位である。

(3)式の右辺第 1 項を左辺に移項して両辺を Δt で割ると、(3) 式は

$$\{z(t + \Delta t) - z(t)\} / \Delta t = - r z(t)$$

となる。左辺は単位時間当たりの水位の変化 $\Delta z / \Delta t$ であるから、 $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、(2) を使って

$$z'(t) = - r z(t) \quad (4)$$

を得る。すなわち $z(t)$ は微分して $- r z(t)$ になる関数である。このような関数は、任意の定数 C に対して

$$z(t) = C e^{-rt} \quad (5)$$

であり、それ以外にはない。 $z(0) = M$ であるから $t = 0$ を代入して $C = M$ と任意定数は定められる。

(5) が (4) の必要十分条件であることは正しく証明を要する事柄なので、ここで証明しておこう。

(十分性の証明)

(5)を微分すると(4)になることを示せばよい。すなわち $z(t) = M e^{-rt}$ とおいて

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta z / \Delta t = - M r e^{-rt}$$

となることを証明すればよい。そのためにまず

$$\begin{aligned} \Delta z / \Delta t &= [z(t) - z(t - \Delta t)] / \Delta t \\ &= M [e^{-rt} - e^{-r(t - \Delta t)}] / \Delta t \\ &= - M e^{-rt} (e^{r\Delta t} - 1) / \Delta t \end{aligned}$$

とする。 $r\Delta t > 0$ なら $e^{r\Delta t} > 1$ だから $e^{r\Delta t} - 1$ の逆数を s とおくと $s > 0$ である。 $e^{r\Delta t} = 1 + 1/s$ とおいて両辺の対数をとると、 $r\Delta t = \log_e(1 + 1/s)$ であるから

$$\Delta t = (1/r) \log_e(1 + 1/s)$$

を得る。したがって

$$(e^{r\Delta t} - 1) / \Delta t = (1/s) / \{(1/r) \log_e(1 + 1/s)\}$$

整理すると

$$(e^{r\Delta t} - 1) / \Delta t = r / \log_e(1 + 1/s)$$

である。

$\Delta t \rightarrow 0$ のとき $e^{r\Delta t} \rightarrow 1$ により $s \rightarrow \infty$ とならねばならないから、このとき

$$(1 + 1/s)^s \rightarrow e$$

となる。もとより $\log_e e = 1$ だから、

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{(e^{r \Delta t} - 1) / \Delta t\} = r$$

よって

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta z / \Delta t = -M r e^{-rt}$$

を得る。

(Q.E.D)

(必要性の証明)

(5) が必要条件であることを示すには、微分方程式: $z' = -r z$ を初期条件: $z(0) = M$ の下で解いて一般解が (5) であることを示せばよい。

(4) の両辺を z で割って変数分離の形にすると、 $(1/z) dz = -r dt$ 両辺の不定積分を求めると左辺は $\log_e |z| + \text{積分定数}$ 、右辺は $r t + \text{積分定数}$ である。積分定数をまとめて c とすれば $\log_e |z| = r t + c$ を得る。これにより $|z| = \exp(r t + c)$ である。定数を $C = \pm \exp(c)$ と置き、指数関数の形式を $z = C e^{rt}$ のように書き直せば、 $z < 0$ の場合も込めて、これが微分方程式 (4) の一般解となる。 $t = 0$ のとき $e^{rt} = 1$ だから初期条件 $z(0) = M$ より、

$$z(t) = M e^{-rt}$$

を得る。

(Q.E.D)

以上の証明には、事前の知識として

- 1) e が或る定数であること
- 2) $x \rightarrow \infty$ とするとき $(1+1/x)^x \rightarrow e$ となること
- 3) $(\log_e |x|)' = 1/x$ であること
- 4) 対数関数 $y = \log_e x$ の逆関数を $y = \exp(x)$ と書いて指数関数と呼ぶこと
- 5) 微分して $f(x)$ になる関数 $F(x)$ を原始関数という— $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であれば任意の定数を加えた $F(x) + C$ も原始関数である— C を積分定数という—原始関数を別名不定積分ともいう—不定積分を求めることを積分するという

以上の5項目だけが必要である。

4), 5) だけなら、用語の定義だと思えば、数学嫌いの人にも受け容れられるだろうが、1), 2), 3) は知識として覚えろと言われたら赦せない—というのが本音だろう。実は—数学好きの人にとっても本音は全く同じなのである—1), 2), 3) は一体となった事柄を表していて証明でもされない限り意味が全く読み取れない。だから知識として覚えろと言われたら赦せない—覚えたくない—というのが、佳いセンスをもった人に共通の反応だと言うことができる。この件についてはアペンディックスを見よ。

【水流のアナロジーに戻って】

最後の式を使うと、水流のアナロジーの (3) 式は

$$\begin{aligned} z(t+\Delta t) &= z(t) - r z(t) \Delta t \\ &= (1 - r \Delta t) z(t) \\ &= (1 - r \Delta t)^2 z(t-\Delta t) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - r \Delta t)^3 z(t - 2 \Delta t) \\
&= \vdots \\
&= (1 - r \Delta t)^{t/\Delta t + 1} z(0)
\end{aligned}$$

であり、前に $\Delta t = 1/n$ と決めたことを思い出せば

$$r \Delta t = r/n, \quad t/\Delta t + 1 = n t + 1$$

と書き換えることができるから、結局

$$z(t) = (1 - r/n)^{nt} z(0)$$

となる。 $\Delta t \rightarrow 0$ により $n/r \rightarrow \infty$,

$$(1 - r/n)^{nt} = \left[\left\{ 1 - \frac{1}{n/r} \right\}^{n/r} \right]^{rt} \rightarrow [e^{-1}]^{rt} = e^{-rt}$$

であるから、すでに得られている水位の式

$$z(t) = M e^{-rt} \quad (4)$$

は、佳いセンスによっても、確かめられることが解る。

微小時間 dt 分間での水位の変化は (4) の微分

$$dz = -r M e^{-rt} dt \quad (5)$$

で表されるが、これは t 分後の時点で $[t, t + dt]$ の間に $r M e^{-rt} dt$ トンの水を放出することを表している。単位時間当たりの流出量を $y(t)$ トン/分とすると、

$$y(t) = r M e^{-rt}$$

である。短い時間 Δx 分の間 $y(t)$ トン/分は一定であるものとする、任意の与えられた定数 $a \geq 0$ に対して必ずしも短くはない時間区間 $[a, t]$ ($t \geq a$) 間の総流出量 $S(a, t)$ は $m = (t - a)/\Delta x$ 個の小流出量の和：

$$\begin{aligned}
S_0 &= y(a)\Delta x + \sum_{k=1}^{m-1} y(a + k\Delta x)\Delta x \\
S_1 &= \sum_{k=1}^{m-1} y(t - k\Delta x)\Delta x + y(t)\Delta x
\end{aligned}$$

で表される。 S_0 は $y(x)$ が区間 $[x, x + \Delta x]$ で一定としたときの和、 S_1 は $y(x)$ が区間 $[x - \Delta x, x]$ で一定としたときの和、ただし $a \leq x \leq t$ である。 $t = a + m\Delta x$ であるから合計操作 Σ の中身は同一で、差 $S_0 - S_1$ を s とすると $s = [y(a) - y(t)]\Delta x$ である。ここで $m \rightarrow \infty$ とすると $\Delta x \rightarrow 0$ だから $s \rightarrow 0$ となって S_0 と S_1 は同一の無限級数の和

$S(a, t)$ に収束する。

この和を合計操作の記号 Σ の代わりに $\int$ を用いて

$$S(a, t) = \int_a^t y(x) dx$$

と書き $y(x)$ の定積分という。 $S(a, t)$ は t の関数である。 $dS = S(a, t + dt) - S(a, t)$ は時点 t での微小時間 dt における流出量だから $dS = y(t) dt$ である。したがって

$$S'(a, t) = y(t) = r M e^{-rt}$$

であり $S(a, t)$ は $y(t)$ の原始関数である。 $y(t)$ の原始関数を $Y(t)$ とすると (5) より

$-r M e^{-rt}$ の原始関数は水位 $z(t) = M e^{-rt}$ であるから $Y(t) = -z(t)$ となる。2 時点間の水位の差 $z(a) - z(t)$ は時間 $[a, t]$ 内の流出総量に外ならないから

$S(a, t) = \int_a^t y(x) dx = z(a) - z(t) = -Y(a) + Y(t) = Y(t) - Y(a)$ である。この意味で $Y(t) - Y(a)$ を $\left[Y(x) \right]_a^t$ と書く。

$$\begin{aligned} Y(t) - Y(a) &= -M e^{-rt} - (-M e^{-ra}) \\ &= M(e^{-ra} - e^{-rt}) \end{aligned}$$

となる。 $a=0$ とすれば

$$S(0, t) = M(1 - e^{-rt}) \quad (6)$$

である。(6) で $t \rightarrow \infty$ とすると $S(0, t) \rightarrow M$ である。すなわち、十分な時間が経過した後は、水門より上の水はすべて流れ出し、流出した総量は M トンと等しくなる。これは定積分で書くと

$$M \int_0^\infty r e^{-rt} dt$$

であり、これが M と等しいのだから

$$\int_0^\infty r e^{-rt} dt = 1$$

となる。このことから、 $r e^{-rx}$ を流出時刻 x の確率密度関数という。すなわち水門を開いてから t 分以内にすべて流出する確率は

$$Pr\{x \leq t\} = \int_0^t r e^{-rx} dx$$

で表される。流出時刻の期待値は

$$E(x) = \int_0^\infty x \times r e^{-rx} dx$$

である。この式の左辺 $E(x)$ というのは確率変数 x の期待値をとるという操作を表す書き方で関数ではない。右辺の定積分を計算するには部分積分の公式

$$[f(x) \times g(x)] dx = F(x) \times g(x) - \int [F(x) \times g'(x)] dx$$

を用いる。

$f(x) = r e^{-rx}$, $g(x) = x$ とすると $F(x) = -e^{-rx}$, $g'(x) = 1$ であるから

$$\begin{aligned} \int x \times r e^{-rx} dx &= -e^{-rx} \times x - \int [-e^{-rx} \times 1] dx \\ &= -x e^{-rx} - (1/r) e^{-rx} \end{aligned}$$

となる。定積分をとって

$$\left[-x e^{-rx} - (1/r) e^{-rx} \right]_0^\infty = 0 - (-1/r) = 1/r$$

よって $E(x) = 1/r$ を得る。

すなわち、水の平均流出時刻はパラメータ r の逆数である。 $T = 1/r$ において、これを水の流出にかかる「平均遅れ」という。

【解釈的展開】

(3) 式が出てくる所までが譬—擬え—アナロジの領域で (3) 式が出てから以降は「数学」である。数学は譬喩ではなく、歴史認識に関わりなく—このことをコンテキスト・フリーという—天下万民に共有される—これを普遍性という—真理に到達する唯一の方法である。方法だから人が使うものであるから、時として間違ふこともあるが、間違いがあればそれは必ず発見される—という意味で、センスがある人もない人も、優等生も劣等性も同じ知識を共有することができる。(3) 式以降は、雄大な峡谷の眺めもダ

ムも水の流れという実体も、それを鑑賞する人間の存在性の自己確認も一切要らない—だから詰まらないのだろうか—否、詰まる詰まらないとは一切無関係なのである。

譬喩はセンスのない人には全く意味が解らないし、話しが詰まらなければ誰にも相手にされないが、数学は誰にでも解る意味ある定理によって構成されていて、誰でもそれを使わずには居られないのである。前に挙げた定義は見出し語と明瞭な必要十分条件とを等号で結んだもの—明瞭性を保証するためには勉強が必要—だったが、定理は証明されている必要十分条件なので本を読んだり講義を聴いたりして勉強することが一切要らない。自ら証明する必要さえない—誰でも証明できることが前提されているからである。勿論如何なる定理の証明も定義から出発するから—その定義の意味の明瞭性は、数学とは別のところで示されていなければ誰にも理解できない—勉強しなければ分からない。数学の狡い所は—賢い所というべきか—定義は所与として扱えば善い—意味は問わない—としたことである。

早い話、或る定理を必要条件とする任意の条件文は、それが何であれ、数学的には、定義として受け容れることができる—ここでは水位を (3) 式で定義したが、これを定義として出発点において (3) 式から (6) 式へと到るのに、定義の妥当性の吟味はまったく忘れていることが赦されるのである。

人の世→水の流れ→貯水池→水位→ (3) → (6) という話の流れの中で、「人の世→水の流れ」が譬の部、「水の流れ→貯水池→水位」がアナロジの部である。「水位→ (3)」が定義、「(3) → (6)」が定理である。

「(3) → (6)」は必要十分条件だから、同定義が同時に

「水位→ (6)」を意味していることが証明されている。定義の妥当性と関係なく水位が (6) 式の総流出量の蓄積を含意する—それは定義から導かれる——ということの妥当性を示している。

かくして、数学的含意の解釈に進むことができる。曰く「一定率 r で水位が減少する水の流出は $1/r$ を平均遅れとする 1 次の指数遅れである」。

譬→アナロジ→定義→定理→解釈と話しを進めてわれわれが得たものは一つの知識である。この知識は、「水の流れに擬えられるものがもしあれば、そこには 1 次の指数遅れと呼び得る現象が観察されるだろう」という予想を与えてくれる。すなわち、ものの見方を変える可能性を拓けるのである—見方を変える可能性を試してみることは、必ずや対話をより豊かなものにするだろう—それは対話をとおして共有される可能的未来像をよりセンスあるものに進化させる。

「定義→定理」を数学の部として括れば、譬の部→アナロジの部→数学の部→解釈の部—と自らたどることによって、より善い未来を創造するための代替案開発を促進できるのではない—それをよりスムーズに実現するための技術を研究し開発したいもの—という希望のもとに、未来学は研究を続けるのである。

【エクステンション】

センス磨きのための頭の体操かい—と覚えたばかりの「譬ツッコミ」をしたいところだろうが、数学にはまだまだ使い道がある—理論を拡張して未だ知らない道を啓開することができる—ということを知るべきだ。

ダムは溜めた水を下流に放出しているだけではない—もちろん、それだけでも、水利と洪水制御といった価値ある仕事を担っているが—高い所から水を落として水車を回し、発電機を動かして電力を生産している。貯水池に溜まっているのも水、水門を通して流れ行くのも水なのだが、それが川を通して海に注ぎ—蒸発して空に上り—雲となって雨を降らせ—山に浸み込んで湧き出し—川となって貯水池に帰る—同じ水の循環だが、それだけが実在するのだと思い込む必要はない。生産された電気もまた流れをなし—ケーブルを通して送電され—都市に注ぎ—付加価値（生産物）となり—ダム・発電所・水路の実体的維持に再投資（減耗分が補填）される—という具合に水に擬えられるもう一つの循環が措定されるのである。かくして、アナロジィはエクステンションを遂げる—一人里離れた峡谷のダムから人の営む生活空間—社会の真っ只中へと。

電気は水と違って目に見えないから、流れを見たい人は計器で測定する。計器の針は時々刻々変化するだろう—から、四六時中見張っていても電気の流量とは変化するものであるという認識が得られるだけである。だから、計器の針の動きをデータとして統計量を計算し、それによって電気の流れを認識する—という方法がとられる。

時々刻々変化するデータの平均をとることを考えよう。平均値もまた新しいデータが追加されるにしたがい時々刻々変化する。任意の時点において、得られているデータも平均値も、逐次的更新を続ける歴史遺産と同じ意味でストックである。平均値の更新は、その時点ですでに得られている最新データと最新平均値を用いてなされる—データを $x(t)$, 平均値を $y(t)$ とすれば、例えば、 y は次のような式で逐次更新される：

$$y(t) = y(t-\Delta t) + [x(t-\Delta t) - y(t-\Delta t)]/N \quad (7)$$

ここで Δt は更新間隔、 N は平均期間 T 分間に並べて与えられた時系列データ $\{x(t-\Delta t), x(t-2\Delta t), \dots, x(t-T+2\Delta t), x(t-T+\Delta t), x(t-T)\}$ の要素の個数である。

これは時区間 $[t-T, t]$ を N 等分したとき 1 個の刻み幅が丁度 Δt になっている、ということでもあるから

$N \times \Delta t = T$ が成り立っている。したがって (7) は

$$y(t) = y(t-\Delta t) + \Delta t \times [x(t-\Delta t) - y(t-\Delta t)]/T \quad (8)$$

と書き換えられる。

(8) 式の右辺第 1 項を左辺に移項し両辺を Δt で割り、さらに $\lambda = 1/T$ とおけば

$$[y(t) - y(t-\Delta t)]/\Delta t = \lambda [x(t-\Delta t) - y(t-\Delta t)]$$

となり、 $\Delta t \rightarrow 0$ と極限をとれば、微分方程式：

$$dy/dt = \lambda (x - y) \quad (9)$$

が得られる。(9) の両辺を λ で割って整理すると、

$$y + (1/\lambda) dy/dt = x$$

両辺に $e^{\lambda t}$ を乗じれば

$$e^{\lambda t} y + (1/\lambda) e^{\lambda t} dy/dt = e^{\lambda t} x$$

となる—この式の両辺を積分することを考えよう。

積の微分の公式により

$$[(1/\lambda) e^{\lambda t} y]' = e^{\lambda t} y + (1/\lambda) e^{\lambda t} y' = \text{左辺}$$

積分は微分の逆の操作だから

$$[\int_{-\infty}^t e^{\lambda \tau} x(\tau) d\tau]' = e^{\lambda t} x(t) = \text{右辺}$$

よって、 $x(t)$ は外部から与えられるものとすれば

$$(1/\lambda) e^{\lambda t} y(t) = \int_{-\infty}^t e^{\lambda \tau} x(\tau) d\tau$$

と書くことができる。両辺を $(1/\lambda) e^{\lambda t}$ で割って

$$y(t) = \lambda e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^t e^{\lambda \tau} x(\tau) d\tau$$

とし、 $e^{-\lambda t}$ をインテグラルの中に入れ、定積分の範囲をひっくり返すと

$$y(t) = -\lambda \int_t^{\infty} e^{-\lambda(t-\tau)} x(\tau) d\tau \quad (10)$$

を得る。これが微分方程式 (9) の解である—と言われても「へえ、そうですか」としか応えようがあるまい—数学者以外なら誰でもそうだろう。

そこで、 $\theta = t - \tau$ によって積分変数を変換する。

$d\tau = -d\theta$, $\tau = t$ のとき $\theta = 0$, $\tau \rightarrow -\infty$ のとき $\theta \rightarrow \infty$ であるから、(10) 式は

$$y(t) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda \theta} x(t - \theta) d\theta \quad (11)$$

となる—これなら (11) 式を誰が読んでも解釈することができるだろう。

$x(t - \theta)$ というのは、時点 t において与えられている時系列データの内 t より θ 分間過去の x の値を指す。これが $0 < \theta < \infty$ に亙ってすべてデータとして与えられているならば、(11) は θ を確率変数として期待値：

$$E[x(t - \theta)] = \int_0^{\infty} x(t - \theta) \times \lambda e^{-\lambda \theta} d\theta$$

を求める式である—と、諒解される。同時に

$$E(\theta) = \int_0^{\infty} \theta \times \lambda e^{-\lambda \theta} d\theta = 1/\lambda$$

であることは、すでに知識として共有されている。上で $\lambda = 1/T$ と置いたことを思い出せば、 $E(\theta) = T$ である—すなわち平均期間 T 分間というのは、過去への遡り時間 θ の期待値—データの側から見れば平均遅れということになる。

時々刻々変化する電流を記録—記憶するには、計器盤上の目盛を示す数値—データそのまゝ—ではなく、一定の期間 T でまとめて平均をとった計算値を用いた方が、指針のランダムなブレ—無視しても好い—に惑わされることなく、電流そのものがもつ増加減少のダイナミックな変動性を正しく認識することができるようになる。このとき計算—一人のアクション—により生じるフローを記録した平均値—ストック—も独自の変動性を示し、平均遅れを T とする 1 次の指数遅れにしたがう。

この知見は、実証主義的な見地からする理論研究において重要な意味をもつが、水流についての対話—譬から始まり、アナロジィの部→数学の部→解釈の部→エクステンシ

ヨンの部—と経巡ったわれわれの貴重な体験的成果でもある—貴重なのは、それが対話を促進して可能的未来像の知的進化をもたらすからである。

正直なところ、ダムの水流や発電所が作る電流にはさほど興味はない—その筋の専門家に任せておいても一向に差し支えない。一般に知の領域を拡大する仕事も科学者に任せておいた方がよい—われわれはもっと別の楽しい話しをした方が善い。「数学」だかなんとか知らないが微分積分は難しすぎる—これが対話を促進するとはとても信じられない—逆に、少しばかりデキる奴に無駄な優越感を抱かせ、対話を阻害する要因になる—という社会的現実を体験的に知っている—その体験も知識もまた歴史遺産—人類共有の貴重ストックなのである。

貴重ストック—微分積分が難しすぎる—ことが対話における数学の部とエクステンションの部の豊かな展開を妨げる重大な障碍になるという社会的現実—を巧く利用して、テクノクラート集団—ちよいとデキる奴ら—別名をエリートという—は、庶民の対話を制限することによって、自ら特権的身分を享受しようと、社会制度の点検・整備・保守を実践し続けてきた—庶民は自分たちの対話が制限されていることに気がつかない。

対話を制限する社会制度は巧妙に張り巡らされている—それは、幼児教育に始まり—ハロウィーンの仮装大賞、学校の成績、そして「よくできました」の金星シールなど—大学卒業までずっと続く—職場では人もチームも部門もランクづけされ、上位なら報酬がもらえ下位なら罰が待っている—目標管理制度やノルマ、奨励金や事業計画は、部門ごとにばらばらに積み上げられ……と、云々—だれでも、自分の生い立ちを振り返ってみれば、常に数学なんかできなくなつて好いんだよと耳もとで囁かれ続けていたことに気づくだろう。

【社会制度を超えて】

数学は決して難しいものではない。歴史認識の相違を超えて、天下万民共通に受け容れられる普遍的知識—神の存在を前提にしない真理—勉強しなくても解る定義—に到達する唯一の道なのである。それが難しいはずはない。もし微分積分が難しすぎるなら、易しくして万民に受け容れられるようにするのが数学たるの矜持—存在証明—社会的責任である。

早速やってみよう。まず (8) 式を再掲する。

$$y(t) = y(t-\Delta t) + \Delta t \times [x(t-\Delta t) - y(t-\Delta t)] / T \quad (8)$$

これは平均値を逐次的に求める定義式なのだが、これが解り難いのは見てくれが佳くないからである。服を着替えさせて

$$\text{平均値} \cdot K = \text{平均値} \cdot J + DT \times (\text{データ} \cdot J - \text{平均値} \cdot J) / \text{平均期間}$$

としたらどうだろう—この服装をダイナモ方程式という。もう一つの解り難い理由は、これが次の2本の式からデータの合計値という変数を消去した省略形だからである。

$$[1] \quad \text{合計値} \cdot K = \text{合計値} \cdot J + DT \times (\text{データ} \cdot J - \text{平均値} \cdot J)$$

$$[2] \quad \text{平均値} \cdot K = \text{合計値} \cdot K / \text{平均期間}$$

さらにもう一つ解り難い点は「**DT** って何」という問いに答えずに暗黙の前提にしていることである。

ズバリ答えておこう—単位時間を n 個の小区間に均等に分割するときの刻み幅が **DT** で、各小区間から 1 個ずつデータのサンプルをとってデータ・セットを作る—今、単位時間は 1 分だから、 $n = 4$ なら 1 分間を 4 等分して刻み幅は 15 秒間隔となるが、このとき **DT** = 0.25 (分) といって **DT** 経過毎に (すなわち 15 秒に 1 回) 計器盤を見て指針の示す値を記録する。平均期間を 5 分間とすると、標本点の個数は $T/DT = 20$ でサンプル・サイズ 20 個の標本が得られることになる。この 20 個のデータの合計から平均値を出すためには、サンプル・サイズの T/DT で割らなければならない。分数の割り算だから DT/T を掛ければよい。合計値として端からデータに **DT** を掛けたものを足し込んでおきさえすれば、合計値を平均期間 T で割り算するだけで平均値が得られる。

同じ書き方を貯水池の水位に適用すれば

[1] 水位・ $K = \text{水位} \cdot J + DT \times (\text{流入} \cdot J - \text{流出} \cdot J)$

[2] 流出・ $K = \text{水位} \cdot K / \text{放出時間}$

となる— [1] [2] を合わせて 1 次の指数遅れと謂う。

OK—難しい微分積分を使わなくても微分方程式と同等の代替品を作ることができる—のは好いとして、解となる積分の方はどうするのか—お任せください—これをコンパイル『ダイナモ』が引き受けるのである。微分積分を前提にしない代替品「ダイナモ方程式」で記述された任意のモデルは、それがどのようなものであっても、ダイナモによって解曲線に変換される。

【フローダイアグラム】

1 次の指数遅れは水流の譬からの直接的帰結であったが、イメージを図示すると図1のようなになる。このような図をフローダイアグラムという。図1(a)は 1 次の指数遅れのイメージであるが描き方に特段の掟が定められている訳ではなく、そのイメージを見る者に髣髴とさせられればそれで好い。

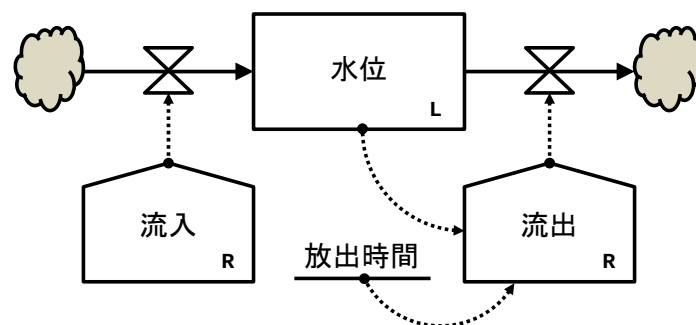


図1(a) 1 次の指数遅れ

ここでは伝統的な部品を用いた—長方形をレベル level、五画形をレート rate、 $\times$ 型をバルブ valve、 $\odot$ をソース/シンク source/sink という。実線の矢印は流れの方向を表し、点線の矢印は情報の発信/受容を表している。もっと即物的に水流そのものをイメージして、**図1(b)**のように描いても好い。

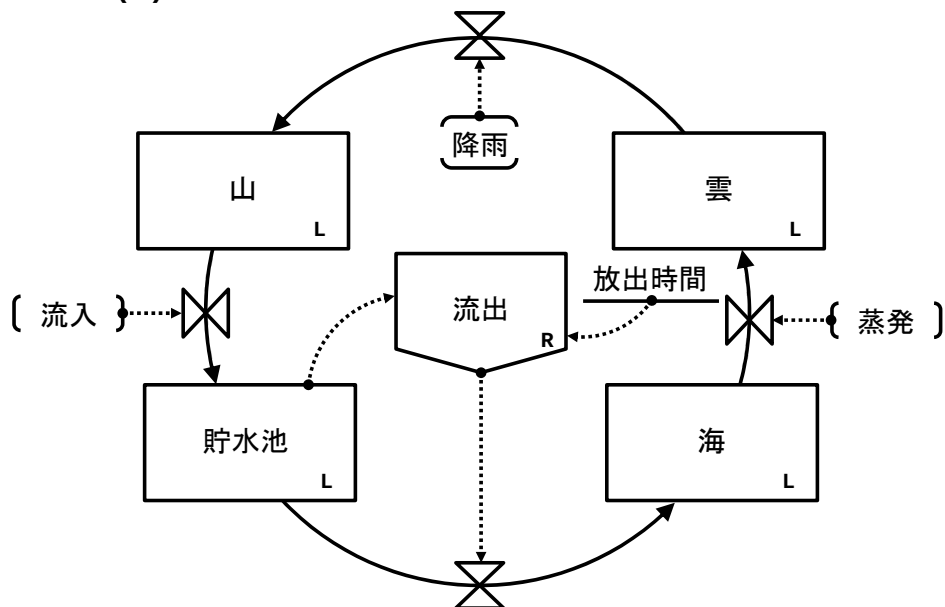


図1(b) 水循環のイメージ

ただし流出した水が巡り巡って帰ってくるという循環をイメージしたいだけなら、適当に省略して **図1(c)**のように描く方が簡潔で良いかも知れない。

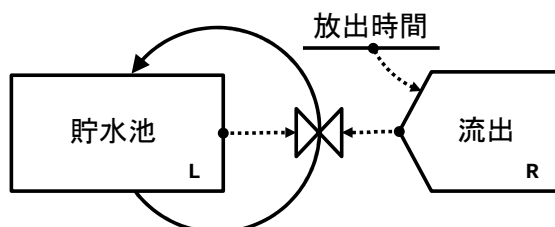


図1(c) 水循環のイメージ代替案

平均値のイメージは**図2**のようになる。

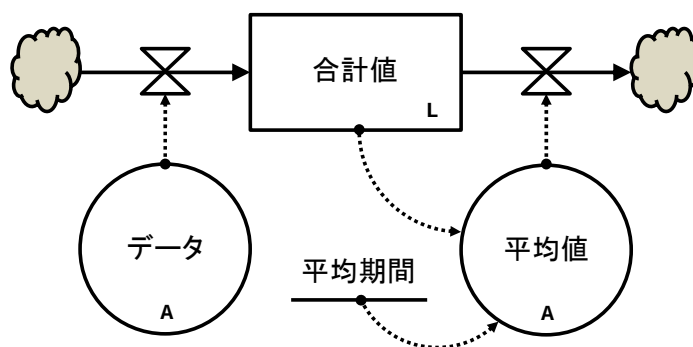


図2(a) 1 次の指数遅れ—平均値の場合

ここで円形は補助変数 **auxiliaries** という。これは省略表現を使って図2(b)のように描くこともできる。

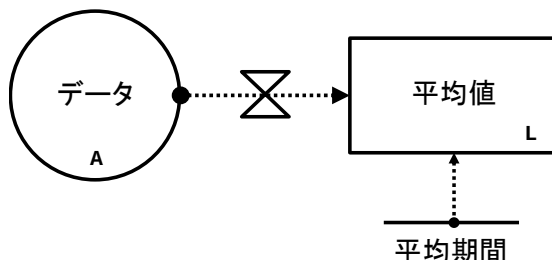


図2(b) 省略法による指数平均値

モデリングは創作物だから、自由にイメージを膨らませることが望ましい—フローダイアグラムの表現は自由な発想とアーティスト・マインドにしたがう。

ダイナモ方程式は自分で描いたフローダイアグラムに基づいて記述される。

【ダイナモ方程式】

図1(a)の1次の指数遅れのダイナモ方程式を書こう。

エクセル・ファイルの **DYNAMOP III** を開き A 列に次のように書く—各行を1つのセルに納めること—セル内は左づめで文頭の方程式記号の後は1桁以上の空白を置くこと—方程式記述中に空白を入れないこと。

```
L      水位.K=水位.J+DT×(流入.JK-流出.JK)
N      水位=M
R      流出.KL=水位.K/放出時間
C      放出時間=5
A      全体水位.K=初期全量-M+水位.K
C      M=50
C      初期全量=120
R      流入.KL=0
PLOT   全体水位,水位
SPEC   DT=0.25/LENGTH=20/PRTPER=1/PLTPER=0.5
```

書き込みが終わったら、表示→マクロ→実行の順にクリックする—コンパイラが動いて、エラーチェックの後、自動的に実行され、図3のグラフが出力される。

55 ページで見た水位の微分方程式

$$dz = -M r e^{-r t} dt \quad \text{ただし } z(0) = M$$

の解 $z(t) = M \exp(-r t)$ と同一のものを微分方程式の知識なしでグラフとして手に入れることができた。

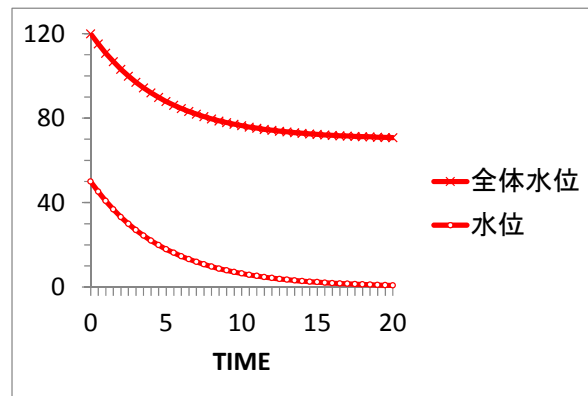


図3 ダイナモの出力結果

ダイナモ方程式で記述されているモデルは、文法上の誤りがなければ、それがどのようなものであっても、直ちにコンパイラが解曲線に変換してくれるのである。文法を覚えるのに勉強する必要はない—コンパイラの要求であるから、以下の文法事項①～⑦によって規則を鵜呑みにするだけで必要十分である—規則は理解できなくても守ってさえいればなんとかなる。

① レベル方程式

水位はレベル方程式で定義される。レベル方程式は、文頭に方程式記号 **L** と書き 1 つ以上の空白を置いた後に書き始められる等式で、その形式は以下のように定められている：

1－1 「時間軸上のいかなる時点における水位も」という意味で左辺には「**水位 . K=**」と書く。

1－2 「DT だけ前の時点における水位」—これを「**水位 . J**」と書く—プラス「当期間内における流入量-流出量の差」—これを「**DT×(流入 . JK-流出 . JK)**」と書く—を右辺に等置する。すなわち：

L 水位 . K=水位 . J+DT×(流入 . JK-流出 . JK)

である。ここで「当期間内」というタイミングを「. JK」と表記し、「同期間中一定の単位時間当たり流入量」を「**流入**」、「同期間中一定の単位時間当たり流出量」を「**流出**」と書く—「一定の」とは「値が変わらない **fixed**」を意味し、「単位時間当たり流量」の単位は「**トン/分**」、「DT」の単位は「**分**」である—単位の取り方は定式者の自由であるが、等式の両辺は同一の単位で測られていなければならない—この要求により「当期間内における流入流出量」は「同期間中一定の単位時間当たり流入流出量」に「期間」の時間的長さ「DT」が乗ぜられているのである。

1－3 この形式はすべてのレベル方程式に共通である—「**水位**」、「**流入**」、「**流出**」は任意の変数名に置き換えることができる—**水位**をレベル変数といい、**流入**、**流出**をレイト変数という。すなわち共通形式は、

L レベル . K=レベル . J+DT×レイト . JK の算術式

である。

② 初期値方程式

すべてのレベル変数は初期値方程式によって初期値が与えられなくてはならない。初期値方程式は、文頭に方程式記号 **N** と書き 1 つ以上の空白を置いた後に書き始められる等式で、その形式は以下のように定められている：

2-1 初期値方程式の形式は

N レベル=数値 または

N レベル=他の変数 または

N レベル=他の変数の算術式

のいずれかである一同式が成立するのは、初期唯一度限りであるから、タイミングを標示する時間添字 **.K**, **.J**, **.JK**などを伴うことはない。

2-2 レベルでない変数にも初期値方程式を用いて初期値を与えることができる。

③ レイト方程式

単位時間当たり流量はレイト方程式で定義される。レイト方程式は、文頭に方程式記号 **R** と書いて 1 つ以上の空白を置いた後に書き始められる等式で、その形式は以下のように定められている：

3-1 「時間軸上のいかなる期間における単位時間当たり流量も」という意味で、左辺には「流入.**KL**=」あるいは「流出.**KL**=」と書く。

3-2 「同期間の開始時点における水位」—これを「水位.**K**」と書く—の算術式または関数式または定数を右辺に等置する。すなわち、一例として：

R 流出.**KL**=水位.**K**/放出時間

である。ここで「流出」の単位は「トン/分」、「水位」の単位は「トン」、「放出時間」の単位は「分」である—単位の取り方は定式者の自由であるが、等式の両辺は同一の単位で測られていなければならない。

「単位時間当たり流量」は時間的長さ「**DT**」の期間 **KL** の間中一定である—その値は期間の開始時点 **K** において定まる—**DT**<単位時間なら単位時間の経過を待たずに「単位時間当たり流量」は変化する。

3-3 この形式はすべてのレイト方程式に共通である—「水位」、「流入」、「流出」は任意の変数名に置き換えることができる—水位をレベル変数といい、流入、流出をレイト変数という。すなわち共通形式は、

R レイト.**KL**=変数.**K** の算術式 または

R レイト.**KL**=変数.**K** の関数式 または

R レイト.**KL**=定数

である。これにより

R 流入.**KL**=0

がレイト方程式の一例として与えられている。

④ 定数方程式

すべての定数は定数方程式によって数値が与えられなくてはならない。定数方程式は、文頭に方程式記号 **C** と書き 1 つ以上の空白を置いた後に書き始められる等式で、その形式は以下のように定められている：

C 定数=数値

これにより、各々一例として

C 放出時間=5

C M=50

C 初期全量=120

等が与えられている。

⑤ 補助方程式

任意の変数を補助方程式で定義することができる。補助方程式は、文頭に方程式記号 **A** と書き 1 つ以上の空白を置いた後に書き始められる等式で、その形式は任意である。任意ではあるが、コンパイラの都合により、次のような制限事項が設けられている。

5－1 未定義変数の使用禁止

5－2 変数の二重定義の禁止

5－3 循環的定義ないし同時方程式の禁止

これらについての説明は文法手引きの範囲を超えるので、後ほど「制限事項」の条でまとめて解説する。

A 全体水位.K=初期全量-M+水位.K

は、上述の方程式リスト中唯一本の補助方程式であるから、制限事項 5－1～3 には該当しない。

⑥ スペック文

ダイナモ方程式のクローズドなセットは、次の形式のスペック文を唯一行伴わなくてはならない。

SPEC DT=数値/LENGTH=数値/PRTPER=数値/PLTPER=数値

6－1 DT は単位時間で測られた期間の長さである。

6－2 LENGTH は時間視野内の任意の長さである。

6－3 PRTPER はプリント出力の時間間隔である。

6－4 PLTPER はプロット出力の時間刻み幅である。

⑦ プリント文およびプロット文

プリント文は文頭に **PRINT** と書き 1 つ以上の空白を置いた後に書き始められる “,” (カンマ) で区切られたプリント出力用の変数並びである。

プロット文は文頭に **PLOT** と書き 1 つ以上の空白を置いた後に書き始められる “,” (カンマ) で区切られたプロット出力用の変数並びである。

【ダイナモ関数と指数遅れ】

補助方程式の右辺は任意の変数の関数式で表すことができるが、ダイナモ独自の関数もいくつか用意されている。その内のテーブル関数とディレイ関数を以下の例示によって説明しよう。

① テーブル関数

流入が一定でなく時間によって変動するというのを

A 変動.K=TABLE(流入データ、TIME.K,0,20,4)

T 流入データ=10/30/10/30/10/30

と書く—これをテーブル関数という。テーブル関数：

TABLE(x,y.K,z₁,z₂,z₃)

は、**x** をテーブルの縦軸、**y.K** を独立変数とする関数で、**[z₁, z₂]** を独立変数の定義域、定義域を **z₃** の幅間隔で等分する区切り毎に取る従属変数の値をデータとして、**T** で始まる縦軸式の右辺にスラッシュで区切って並べた行によって定義される。**変動**は図4(a)のとおり独立変数 **TIME** が 0 から 20 までの定義域を 4 分間隔で動く間にスラッシュで区切って並べられた縦軸の値を順に取り、間隔内の点を **TIME** が通過する所では、与えられたデータを内挿補完した値を取る。

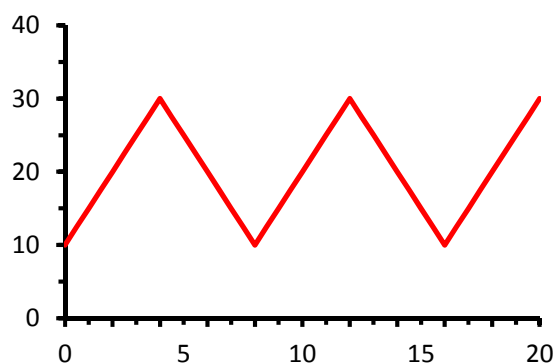


図4(a) テーブル・インプット

元のレイト方程式を

R 流入.KL=変動.K

で置き換えた実行結果は図4(b)のようになる。

PLOT の変数並びに**流入**，**流出**を付け加えて出力させると図4(c)を得る—これで指数遅れの意味が解る。

貯水池のモデルは「流出は流入の1次の指数遅れである」を定式化しているが、流入の山と谷が平均遅れの分だけ右にズレて流出の山と谷の変動に現れることが観察されよう—同時に山が低く谷が浅くなって上下の変動が平滑化されていることが分かる—時間的遅れと変動の平滑化が同時に起こるのである。

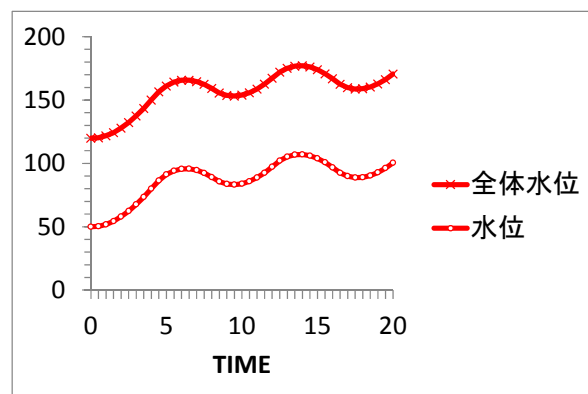


図4(b) ダイナモの出力結果

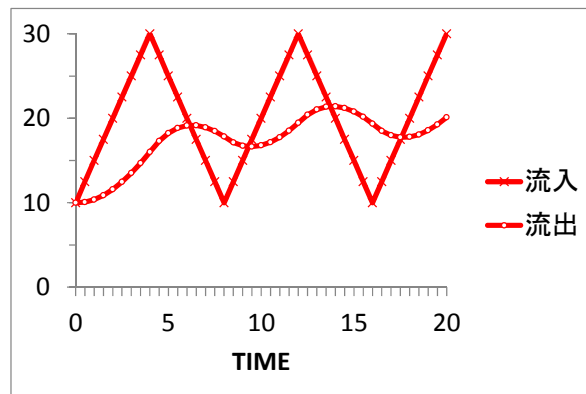


図4(c) ダイナモの出力結果

② ディレイ関数

1 次の指数遅れをダイナモ関数では次のように書く。

R 流出.KL=DELAYN(流入.JK,放出時間,1)

「流入は放出時間を平均遅れとする 1 次の指数遅れである」と読む—これをディレイ関数という。

$y.KL=DELAYN(x.JK, z, n, y_0)$

を y は z を平均遅れとする x の n 次の指数遅れであり、 y の初期値は y_0 であると読む—引数 n の欄には自然数が書かれ、初期値は省略することができる。

R 流出.KL=水位.K/放出時間

を上ディレイ関数で置き換えてシミュレーションを実行してみると図4(c)と全く同一の結果が得られる。

③ 指数平滑法

前に数学の部で見た 1 次の指数遅れと同じになるという平均の式を使って

L 平均.K=平均.J+DT×(流入.JK-平均.J)/平均期間

N 平均=流入

C 平均期間=5

R 流出.KL=平均.K

というダイナモ方程式で流出を置き換えてやると、このシミュレーション結果も図4(c)と全く同一になる。

—この平均の仕方を「指数平滑法」と呼ぶ所以である。

山に降る雨は天候による変動性を被る一雨を貯水池に一旦溜めてから水門を通して流してやると、川への流出は天候による変動を緩やかにして下流へと伝える—ダムがフラッド・コントロールに役立つ理由は正に指数平滑化効果によるものであることが解ろう。この理解は、その理屈が数学的に証明されることによって、巨大なダムの建設にかかる巨額の投資を正当化する際の有力な論拠の一つとなった。

微分方程式を使って数学的に導いた結果と同じものが、その意味の理解を助ける解釈つきで、ダイナモを用いたシミュレーション結果としてわれわれの手許に得られたことには大きな意味がある—ダイナモの利用には微分積分の知識が全く要らないことをメリットとすれば、数学の部とエクステンションの部に改善をもたらしたと言っても過言ではないからである。

④ 調整的意志決定

個人であれ団体であれ人の意志決定は自由であるが、目標へ向けて何らかの指標を調整して行くという手法が採用されるケースが広く観察される—目標も固定的なものではなく、それ自体が時間と伴に変動する。

R 調整.KL=(目標水準.K-指標.K)/調整期間

A 目標水準.K=変動.K

L 指標.K=指標.J+DT×調整.JK

N 指標=目標水準

C 調整期間=5

調整のレイト方程式の右辺には調整期間で割るという式が現れているが、これは等式の両辺は同じ単位で測られていなければならないという要求に応えるためである。目標水準も指標も各時点 **K** において値が決まるレベル変数であるのに対し、調整はレイト変数であるため、時間の単位をとる何らかの変数で割り算することにより**トン/分**といった左右同一の単位に換算しなければならない—そこで分母にあたる変数に対して、この場で**調整期間**と仮の名前を与えたのである—この式により調整期間という概念を新たに定義したと言っても差し支えない。

水門をこの指標に合わせて調節するものとする

R 流出.KL=指標.K

という調整的意志決定が定式化される。

この定式によりレイト方程式を置き換え、上の 5 本の方程式をリストに付け加えて **DYNAMOPⅢ** のワークシート **Dyna1** の A 列に書き込み、**表示→マクロ→実行**の順にクリックすると、コンパイラが動いて、エラーチェックの後、自動的に実行がなされ、流入と流出のグラフが出力される。

このシミュレーション結果も、**図4(c)**と全く同一になることが確認される。調整期間で割ったのは左右の単位を合わせるというご都合主義からではなく、そうすることが数学的にも正しい結果を得る上で必要だったのだということが、この一事からも諒解されよう。

方程式をフルに書き下すと

L 水位.K=水位.J+DT×(流入.JK-流出.JK)

N 水位=M

R 流入.KL=変動.K

R 流出.KL=指標.K
A 変動.K=TABLE(流入データ, TIME.K, 0, 20, 4)
T 流入データ=10/30/10/30/10/30
R 調整.KL=(目標水準.K-指標.K)/調整期間
A 目標水準.K=変動.K
L 指標.K=指標.J+DT×調整.JK
N 指標=目標水準
C 調整期間=5
NOTE サプリメント
A 全体水位.K=初期全量-M+水位.K
C M=50
C 初期全量=120
PLOT 全体水位, 流入, 流出
SPEC DT=.25/LENGTH=20/PRTPER=1/PLTPER=.5

である。

NOTE から始まる行はコメントを自由に書き込むことができるスペースで方程式ではない。コメント欄に書いたサプリメントというのは単に出力のためだけに用いられる—他の方程式の右辺には一切登場しない—変数の定義であることを意味している。だから以下の3行の方程式は、シミュレーションが示すシステムの変動性には影響を与えない—モデルの定式化においては必要のない部分である。

われわれはダム建設と運営に格別興味がある訳ではない。しかし、上記のサプリメントを除く部分は、指数遅れ・指数平滑法・調整的意志決定というわれわれの生活に密着した変動現象を生み出すシステムの譬になっている—モデルは理論ではなく譬なのである。ダム建設のための投資を正当化する理論武装に使われるのは上記のサプリメントの部分である—必要に応じていくらかでも現実的・具体的なサプリメントをモデルのパフォーマンスに抵触することなく付け加えることができる—ということのもつメリットは殊の外大きい。

現実的・具体的なサプリメントをどうやって作るかは、ここでのわれわれの関心ではない—モデリング&シミュレーションそのものの意味を問おうとしているからである。これまで、譬から出発→アナロジの部→数学の部→エクステンションの部→解釈の部と経巡って、ここに漸く新たな譬に逢着した。モデリング&シミュレーションで数学の部を置き換えることにより、ここから先の遍路歷程を容易なものにしたい—これは譬でもあり駄洒落でもあるが—まだまだ先へと道は続くのである。それは未来へと通じる道である。装備は軽くしておくに如くはない。

蓋し20世紀の科学技術と政策科学の限界を超えて人類はその先へと進まなければならないからである。

第5章 因果と時系列の操作法

5-1. 因果と時系列の関係性を扱う技術

例題・練習問題・演習問題を多数用意する作業を継続中である。

5-2. データと時系列の関係性を扱う技術

例題・練習問題・演習問題を多数用意する作業を継続中である。

第6章 シミュレーションの利用法

6-1. システム思考を発展させる技術

例題・練習問題・演習問題を多数用意する作業を継続中である。

6-2. システム原型の時系列的展開

例題・練習問題・演習問題を多数用意する作業を継続中である。

第7章 成長性と相互作用の理解

7-1. 利息算と企業成長のモデリング

例題・練習問題・演習問題を多数用意する作業を継続中である。

7-2. 利息算と企業成長モデルのシミュレーション

例題・練習問題・演習問題を多数用意する作業を継続中である。

以上が、今年度開発分であり、全体構想(三ヶ年事業分)の30%程度である。